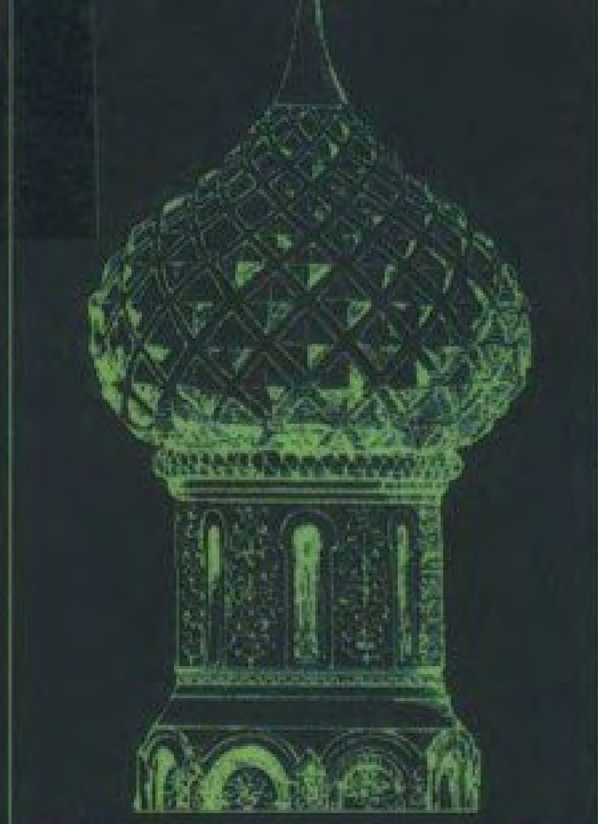


俄罗斯数学
教材选译

微分几何与拓扑学简明教程

□ A. C. 米先柯　A. T. 福明柯　著
□ 张爱和　译
□ 胡和生　陈维桓　姜国英　校

高等教育出版社
Higher Education Press

本书是俄罗斯莫斯科大学经典数学教材之一，是微分几何教程的简明阐述，在大学数学系两个学期中讲授。内容包含：一般拓扑，非线性坐标系，光滑流形的理论，曲线论和曲面论，变换群，张量分析和黎曼几何，积分法和同调论，曲面的基本群，黎曼几何中的变分原理。叙述中用大量的例子说明并附有习题，常有补充的材料。

本书适合数学、物理及相关专业的高年级本科生、研究生、高校教师和研究人员参考使用。

ISBN 7-04-018405-2
9 787040 184051 >
定价 32.00 元

俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

微分几何与拓扑学简明教程

□ A. C. 米先柯 A. T. 福明柯 著
□ 张爱和 译
□ 胡和生 陈维桓 姜国英 校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2005-5735 号

Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Краткий курс
дифференциальной геометрии и топологии

ISBN 5-9221-0442-X

图书在版编目 (CIP) 数据

微分几何与拓扑学简明教程 / (俄罗斯) 米先柯, (俄罗斯)福明柯著;张爱和译. —北京: 高等教育出版社,2006.1

ISBN 7-04-018405-2

I.微... II.①米...②福...③张... III.①微分几何-教材②拓扑-教材 IV.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 141187 号

策划编辑 张小萍　**责任编辑** 赵天夫　**封面设计** 王凌波
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×1092　1/16	版　次	2006 年 1 月第 1 版
印　张	15.25	印　次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　数	290 000	定　价	32.00 元

物料号 18405-00

序

从上世纪50年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材。这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才。到了60年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用。客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的。

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益。但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾。

事情终于出现了一个转折的契机。今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立250周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版。这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视。会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要。《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等

教育出版社组织出版的。

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材。有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书。有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴。这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序。

李大潜

2005 年 10 月

目 录

第一章 微分几何导引

1.1 曲线坐标系 最简单的例子

1.1.1 引论

我们来考察 n 维欧氏空间,今后用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间. 在 $\mathbf{R}^n$ 中,关于选定的正交基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,给出了笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$. 我们提醒一下,欧氏数量积概念与 $\mathbf{R}^n$ 中的笛卡儿坐标紧密地联系着,数量积为双线性形式,它将每一对向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$ 与一实数相对应,后者通常表示为 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle$,而且这个运算对每个自变量是对称的和线性的,而形式本身是正定的. 在笛卡儿坐标系中,

$$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle=\xi^1\eta^1+\cdots+\xi^n\eta^n,$$

其中,$\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$,$\boldsymbol{\eta}=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$.

但是,要很方便地把许多具体问题用解析法表示出来,笛卡儿坐标是不够的. 当然,我们有十分简单的例子,例如圆或椭圆,它们在笛卡儿坐标下的解析表达式是非常简单的.

然而,例如在物理问题中,往往遇到质点在任何力场中运动的轨迹,写出它们在笛卡儿坐标下的显式表达式是困难的. 例如在笛卡儿坐标下方程 $\sqrt{x^2+y^2}-e^{\lambda\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}=0$ 所确定的螺线就是这样(图 1.1). 当然,这个表示法还不很复杂,但是在另外的所谓极坐标系下,写出这个曲线却甚为简单. 极坐标系 (r,φ) 与笛卡儿坐标系之间的关系为:$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$(图 1.2). 在这个坐标系下螺线的方程为 $r=e^{\lambda\varphi}$,以此可立即看清质点按此轨迹运动的特性.

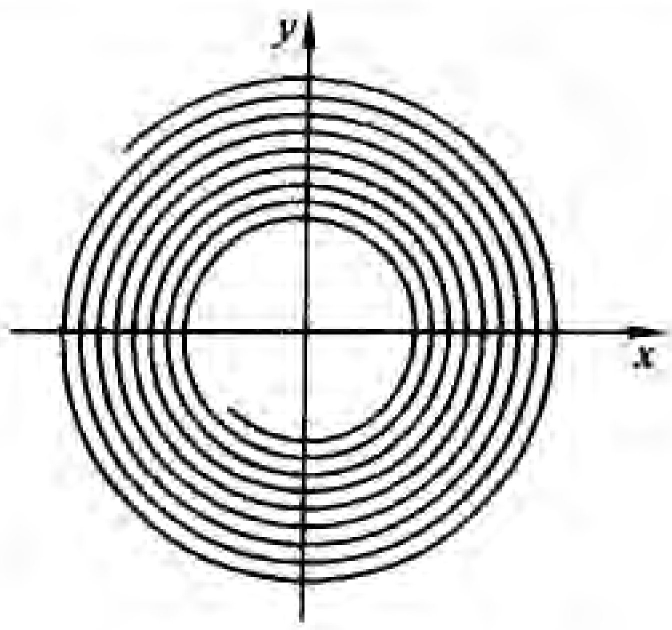


图 1.1

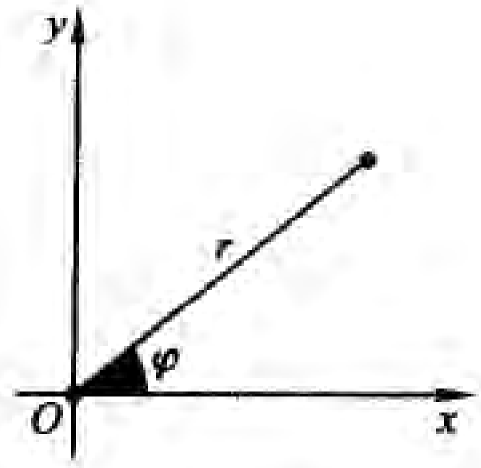


图 1.2

这里要指出，在有些问题上，极坐标是有效的. 我们考察在平面中心力场中的质点运动；设中心在 O 点，并在平面上引用极坐标 (r,φ). 假设 $\boldsymbol{r}$ 是动点的向径，r 是它的长，t 是时间，这时 r 和 φ 是时间的某个函数. 在极坐标为 r、φ 的点 $\boldsymbol{r}(t)$，考察两个垂直的单位向量：向量 $\boldsymbol{e}_r$，它的指向平行于该点的向径；向量 $\boldsymbol{e}_\varphi$，它垂直于 $\boldsymbol{e}_r$，且其方向为极坐标 φ 的增加方向(图 1.3). 我们在 $\boldsymbol{r}(t)$ 上加点表示向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 关于时间 t 的微分. 那么，在力学中已经知道，在平面中心力场中的质量为 1 的质点的运动由下面的微分方程确定：$\ddot{\boldsymbol{r}}=f(r)\boldsymbol{e}_r$，这里 f 是变量 r 的某个光滑的函数.

质点运动可用两个函数给出：$r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$. 完全容易相信，量 $r^2\dot{\varphi}$ 是保持不变的. 这是 Kepler 定律之一，这些定律是 Kepler 研究行星在太阳系中的运动时得出的. 对这个保持不变的量完全可以赋予明显的意义. 为此，Kepler 自己引进了下面合适的概念：他称向径 $\boldsymbol{r}(t)$ 扫过的面积 $S(t)$ 变化的速度为扇形速度 v，即 $v=\dfrac{dS(t)}{dt}$.

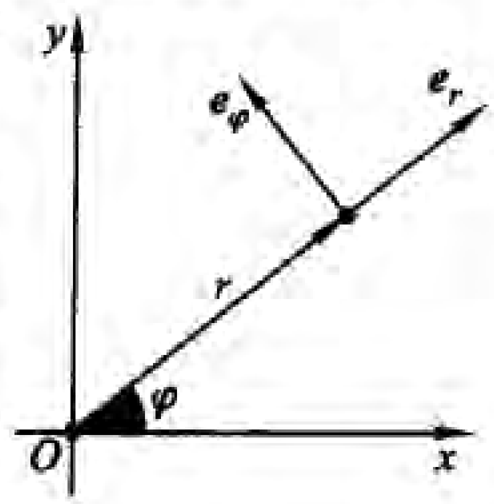


图 1.3

于是，Kepler 定律简述为：在相等的时间内向径扫过相等的面积，换言之，扇形速度是常数，即$\dfrac{dS(t)}{dt}=$常数.

另一方面，在解力学以及物理学的具体问题时，还产生另外的曲线的坐标——柱面坐标、球面坐标等等. 考察类似的用一组实数给出空间点的方法，可以发觉我们下面叙述的是共同思想的基础.

1.1.2 笛卡儿坐标和曲线坐标

我们研究欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域. 这里提醒一下，区域是欧氏空间中这样的任意集合 C，它的每一点 P 与以 P 为中心，足够小的半径的球一起包含在这个集合中.

我们考察用 $\mathbf{R}_1^n$ 表示的第二个欧氏空间. 给出区域 C 中点 P 的坐标——它意

味着将 $\mathbf{R}_1^n$ 的点与一个数组对应. 显然,此对应应该满足一定的要求. 首先,不同的点对应于不同的坐标组,这是必需的.

区域 C 的每一点 P 与一个 n 实数组相对应,得到 n 个函数 $x^1(P),\cdots,x^n(P)$,它们的定义域为区域 C;这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}_1^n$ 的坐标. 通常,要求这些函数是连续的,也是光滑的.

这样,我们考察两个欧氏空间:具有笛卡儿坐标 $y^1,\cdots,y^n$ 的 $\mathbf{R}^n$ 和具有笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 的 $\mathbf{R}_1^n$;设 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域.

定义 1　若函数组 $x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$ 给出了 $\mathbf{R}^n$ 中区域 C 到欧氏空间 $\mathbf{R}_1^n$ 中某区域 A 上的双方单值且连续的映射,则称此函数组为区域 C 的**连续坐标系**. 换句话说,$x^1(P),\cdots,x^n(P)$ 这函数组给出的映射为区域 C 到区域 A 上的同胚.

函数 $x^1(P),\cdots,x^n(P)$ 称为点 P 关于坐标映射 $f:C\to A$ 的**坐标**.

例如,可以取 $x^1=y^1,\cdots,x^n=y^n$ 给出的恒等映射作为映射 $f:C\to A$.

若坐标映射 f 已经给定,有时我们把带有坐标 $x^1(P),\cdots,x^n(P)$ 的点 P 写成 $P(x^1,\cdots,x^n)$ 的形式.

从所有连续的坐标映射中,将从区域 C 到区域 A 上的光滑映射分出来,所谓光滑映射就是,所有函数 $x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$ 是其自己的变量 $y^1,\cdots,y^n$ 的光滑函数. 我们现在立刻转到定义这样的坐标系:它的两个映射 f 和 f^{-1} 都是光滑的. 为此,我们建立光滑映射的 Jacobi 矩阵的概念.

设 $f:C\to A$ 是由函数组 $x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$ 给出的光滑映射.

定义 2　由坐标 $x^1(P),\cdots,x^n(P)$ 的偏导数组成的函数矩阵

$$df=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}$$

称为映射 f 的 Jacobi **矩阵**. 这个矩阵的行列式用 $J(f)$ 表示,并称为映射 f 的 Jacobi **行列式**.

注　对 Jacobi 矩阵,我们引用的符号 df 不会与光滑函数 f 的微分记号引起混乱,因为光滑函数 f 的微分在这个特殊情况下也正好与 Jacobi 矩阵完全一样. Jacobi 矩阵是变的矩阵,即依赖于区域 C 中的点 P.

定义 3　若光滑函数组 $x^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,x^n(y^1,\cdots,y^n)$ 给出区域 C 到欧氏空间 $\mathbf{R}_1^n$ 的某个区域 A 上的双方单值的映射,并且映射的 Jacobi 行列式 $J(f)(P)$ 在区域 C 的所有点不等于 0,则称此光滑函数组为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中区域 C 的**正则坐标系**.

我们指出，映射f的 Jacobi 行列式在区域C中所有点不为 0 的要求，表示f的逆映射f^{-1}是光滑的. 这事实可从隐函数组的定理得到. 于是，正则坐标系是由两个光滑的互逆映射给出的，它们建立起区域C和A之间的同胚.

可以认为，在欧氏空间$\mathbf{R}^n$的区域C中，从一开始已引进了笛卡儿坐标系，在两个空间$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{R}_1^n$自然重合时利用C到A上的恒等映射而得. 这时，再在区域C上引进由正则映射f给出的坐标系，它可看作坐标变换：从原来的笛卡儿坐标"变为"同一个区域C上的新的坐标系.

定义 4 区域C上的正则坐标系也称为区域C上的**曲线坐标系**.

现在，在区域C上考察两个任意的曲线坐标系：$x^1(P),\cdots,x^n(P)$和$z^1(P),\cdots,z^n(P)$. 这就是说给定了两个正则映射：f和g,

$$f:C\to A\subset\mathbf{R}_1^n(x^1,\cdots,x^n);\quad g:C\to B\subset\mathbf{R}_2^n(z^1,\cdots,z^n),$$

即映射f和g分别在区域C,A与C,B间建立了双方单值、双方光滑的对应. 换句话说，区域C的每一点P与两个曲线坐标系$\{x^i(P)\}$和$\{z^i(P)\}$相对应，这里$1\leqslant i\leqslant n$. 因此，可以对照点P的坐标$\{x^i(P)\}$与它的坐标$\{z^i(P)\}$，从而确定了映射$\psi_{x,z}:A\to B$，即$\psi_{x,z}:\{x^i(P)\}\to\{z^i(P)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$. 称如此确定的映射$\psi_{x,z}$为区域$C$上的**坐标变换**. 在这个变换下，点$P$得到的不是原来的曲线坐标$\{x^i(P)\}$，而是新的曲线坐标$\{z^i(P)\}$.

引理 1 映射$\psi_{x,z}$是区域A到B上的双方单值、双方光滑、Jacobi 行列式不为 0 的映射.

证明 映射$\psi_{x,z}$的双方单值性直接由定义 3 得到. 映射$\psi_{x,z}$的光滑性由两个光滑映射的合成仍为光滑映射得到. 剩下验证映射$\psi_{x,z}$具有非 0 的(在区域A中每一点)Jacobi 行列式$J(\psi_{x,z})$.

实际上，映射$\psi_{x,z}$由两个映射合成：$\psi_{x,z}=g\circ f^{-1}:A\to B$(图 1.4). 映射$\psi_{x,z}$的 Jacobi 矩阵分解为映射$f^{-1}$的 Jacobi 矩阵和映射$g$的 Jacobi 矩阵的乘积. 事实上，因为$z^i=z^i(y^1,\cdots,y^n)=z^i(y^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^n(x^1,\cdots,x^n))$，其中函数$\{y^\alpha(x^1,\cdots,x^n),1\leqslant\alpha\leqslant n\}$给出了光滑映射$f^{-1}:A\to C$，所以按复合函数的微分公式得到：$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$，这就是说 Jacobi 矩阵$d\psi_{x,z}$分解为两个矩阵$dg$和$df^{-1}$的乘积. 现在只需说明 Jacobi 矩阵$df$和$df^{-1}$的关系即可. 因为合成映射$f^{-1}\circ f$是区域$C$到自身的恒等映射，那么，得到$d(f^{-1}\circ f)=df^{-1}\circ df=E$，这里$E$为$n$阶单位矩阵，最后得到$df^{-1}=(df)^{-1}$. 这就证明了矩阵$d\psi_{x,z}$满足恒等式$d\psi_{x,z}=(dg)\cdot(df)^{-1}$，于是$J(\psi_{x,z})=J(g)/J(f)$，并且因为两个 Jacobi 行列式$J(g)$和$J(f)$都不为零，所以 Jacobi 行列式$J(\psi_{x,z})$也不为零. 引理得证.

假设在区域C上给出光滑的函数组：$\{x^i(P)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$. 如何知道这组函数是

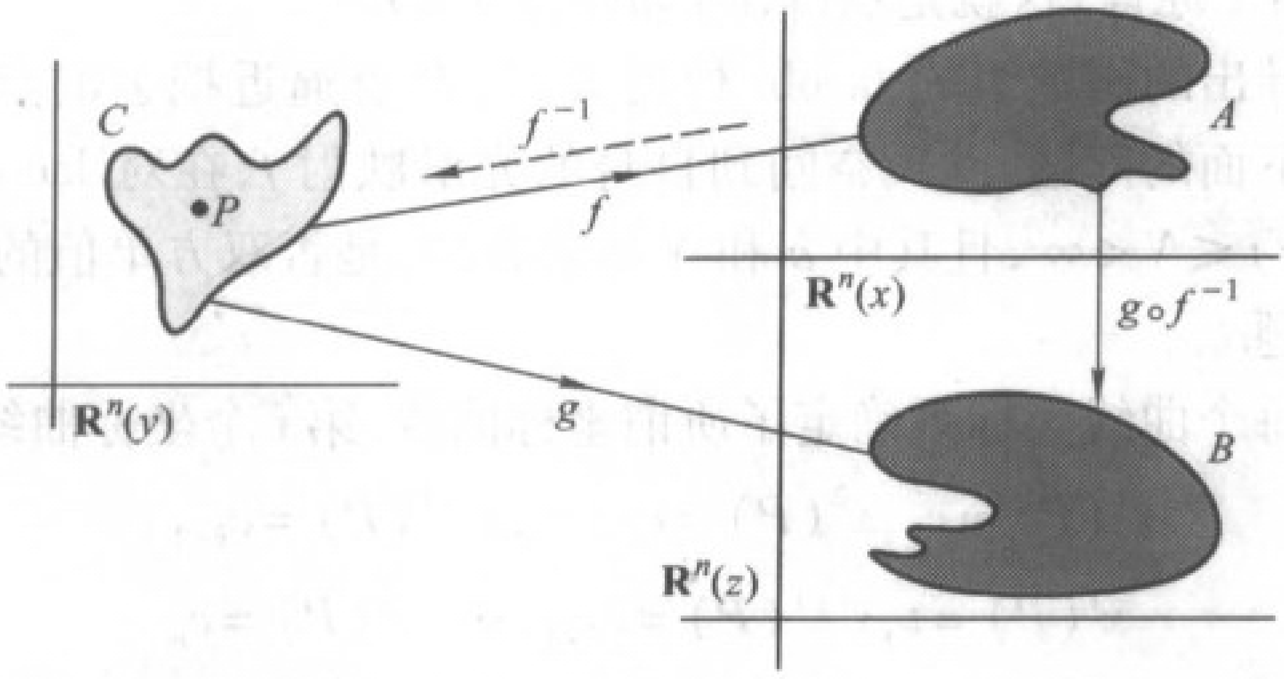


图 1.4

否给出 C 中的正则坐标系？

引理 2 假设光滑的函数组 $\{x^i(P)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$，具有性质：这函数组的 Jacobi 行列式 $J(f)$，$f(P)=\{x^i(P),1\leqslant i\leqslant n\}$ 在区域 C 中不为零. 那么，在区域 C 的每一点 P 存在这样的开邻域，在此邻域中函数组 $\{x^i(P)\}$ 给出了正则坐标系.

这函数组可称为**局部坐标系**.

证明 在引理的条件中没有假定函数组 $\{x^i(P)\}$ 确定区域 C 到欧氏空间 $\mathbf{R}^n_1$ 的区域 A 上的双方单值的映射. 但按隐函数组定理，从 Jacobi 行列式不为零可得逆映射的存在性（至少在局部）. 引理得证.

注意，满足引理 2 条件的函数组决不必然立刻就确定为整个区域 C 中的正则坐标系，就是说区域 A 到区域 C 上的光滑映射 f^{-1} 也可能不存在. 实际上，看一个简单的例子：把在挖掉坐标原点 O 的二维平面取作为区域 C，而取光滑映射 f：$f(y^1,y^2)=(x^1(y),x^2(y))$，这里 $x^1(y^1,y^2)=(y^1)^2-(y^2)^2$；$x^2(y^1,y^2)=2y^1y^2$；也就是若设 $z=y^1+\mathrm{i}y^2$，$w=x^1+\mathrm{i}x^2$（i 是虚数单位），那么 $w=z^2$. 这个映射把复数 z 变换成它的平方. 在平面极坐标 (r,φ) 下可写出这个映射，得到 $f(r,\varphi)=(r^2,2\varphi)$（图 1.5）；Jacobi 矩阵 df 具有形式：

$$df=\begin{pmatrix}2y^1 & -2y^2\\ 2y^2 & 2y^1\end{pmatrix},$$

$$J(f)=4(y^1)^2+4(y^2)^2>0.$$

我们看到，Jacobi 行列式在区域 C 中所有的点是正的（因为原点不在其内）. 因此，按引理 2 我们的映射在区域 C 的每一点的某个开邻域中建立了局部正则坐标系. 然而这时，映射 f 没有逆映射 f^{-1}，因为 f 不是双方单值的.

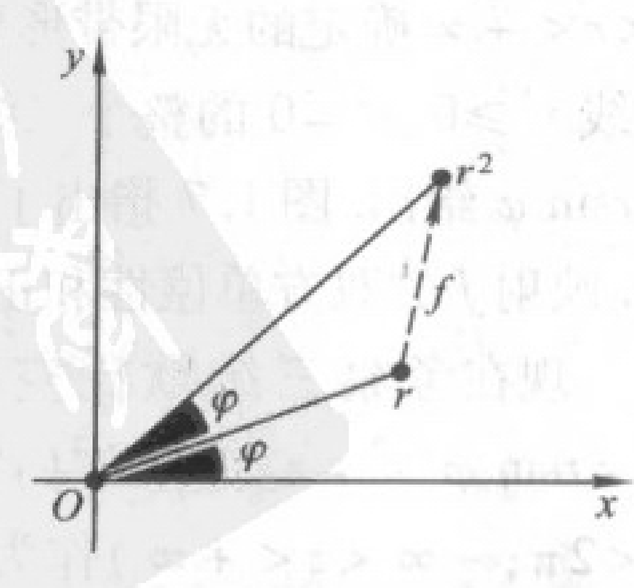


图 1.5

实际上，每一个点，不是坐标原点，$w=x^1+\mathrm{i}x^2$ 在

映射 f 下总有两个原像，这就是点 (r,φ) 和 $(r,\varphi+\pi)$.

例子中所导出的函数组的 Jacobi 行列式，当 P 点逼近挖去的点时，趋于 0. 在几何上已知有下面的问题：欧氏空间到自身的光滑映射 f，在对 Jacobi 行列式加上条件 $0<\varepsilon\leqslant J(f)\leqslant N<\infty$，且其中 ε 和 N 是常数时，是否双方单值的？这里我们将不讨论这个问题.

区域中的每个曲线坐标系确定了所谓坐标曲线，第 i 个坐标曲线由方程

$$x^1(P)=c_1, x^2(P)=c_2,\cdots,x^{i-1}(P)=c_{i-1},$$
$$x^i(P)=t, x^{i+1}(P)=c_{i+1},\cdots,x^n(P)=c_n$$

给出，其中所有的 c_i 是常数，而 t 是连续参数. 随着 t 的变化，点 P 跑过区域中某条光滑的轨线. 于是，从区域 C 中每一点 P 走出 n 条光滑的轨线，这些轨线也称为给定坐标系的坐标曲线(在 P 点). 对另外的点 P，有另外的坐标曲线，并且当 P 点变化时，这个坐标曲线系光滑地变形. 若坐标系是笛卡儿坐标系，那么它的坐标曲线是直线. 在直观描述曲线坐标时，画出坐标曲线是有益的. 图 1.6 显示了坐标的光滑变化，长颈鹿“变为”河马.

1.1.3　曲线坐标系的最简单例子

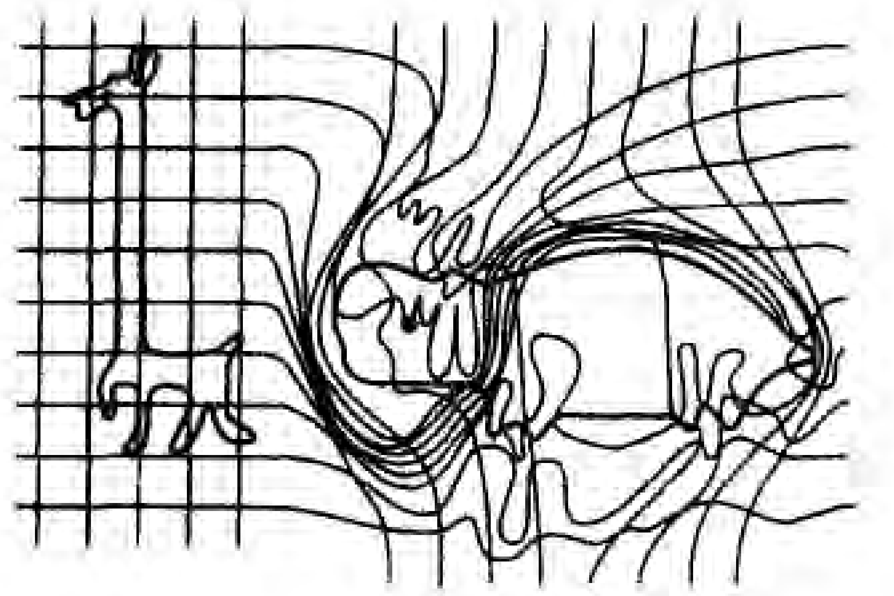


图 1.6

我们从下面的评注开始：平面上的极坐标系 (r,φ) 不是整个平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正则坐标. 实际上，由极坐标系到笛卡儿坐标系的坐标变换函数是：$x^1=r\cos\varphi, x^2=r\sin\varphi$. 求变换的 Jacobi 行列式. 直接计算得

$$J(\psi)=r.$$

于是，Jacobi 行列式在坐标原点为 0. 由此可见极坐标在整个平面上不是正则的. 此外，它使整个二维欧氏平面到自身的映射不是双方单值的，因为形为 (r,φ) 和 $(r,\varphi+2\pi)$ 的点变为同一点.

应该划分出使极坐标是正则坐标的区域 C.

我们考察欧氏平面 $\mathbf{R}^2(r,\varphi)$，这里 $y^1=r, y^2=\varphi$，并且把由不等式 $0<\varphi<2\pi$，$0<r<+\infty$ 确定的无限带形看作为区域 C. 那么在平面 $\mathbf{R}^2(x^1,x^2)$ 上应该取除去半直线 $x^1\geqslant 0, x^2=0$ 的整个二维平面作为区域 A. 映射 $f:C\to A$ 由公式 $x^1=r\cos\varphi, x^2=r\sin\varphi$ 给出. 图 1.7 指出了在映射 f 下坐标曲线的变化，直角坐标网变为极坐标网. 映射 f 的双方单值性和正则性是明显的.

现在考察三维欧氏空间，并研究柱面坐标系. 变换公式为：$x^1=r\cos\varphi$，$x^2=r\sin\varphi, x^3=z$. 研究 $\mathbf{R}^3(y^1,y^2,y^3)$，这里 $y^1=r, y^2=\varphi, y^3=z$，并取区域 $(0<r; 0<\varphi<2\pi; -\infty<z<+\infty)$ 作为 C. 上面引用的公式定义了光滑映射 $f:C\to A\subset\mathbf{R}^3(x^1,x^2,x^3)$，这里区域 A 由 $\mathbf{R}^3(x^1,x^2,x^3)$ 中删去半平面而得到(图 1.8). Jacobi 矩阵具

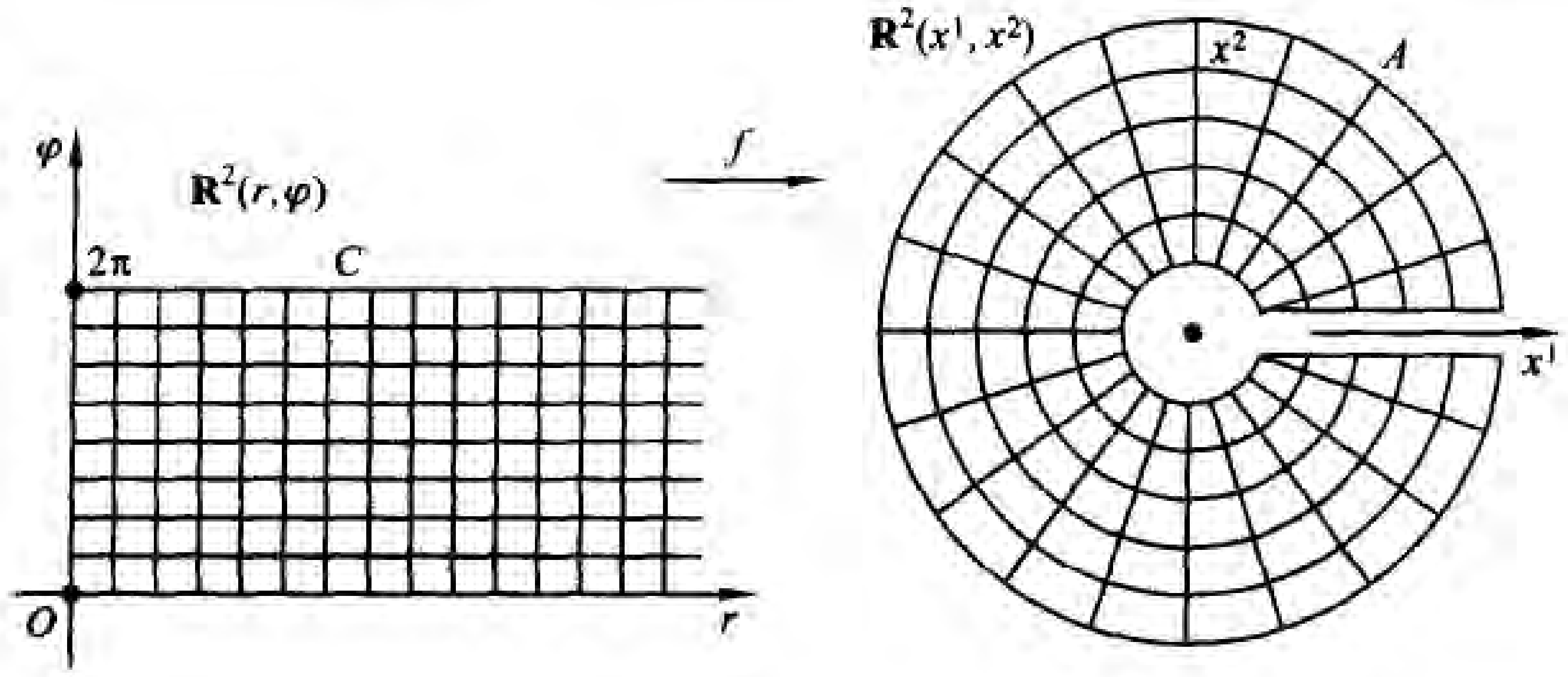


图 1.7

有形式

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

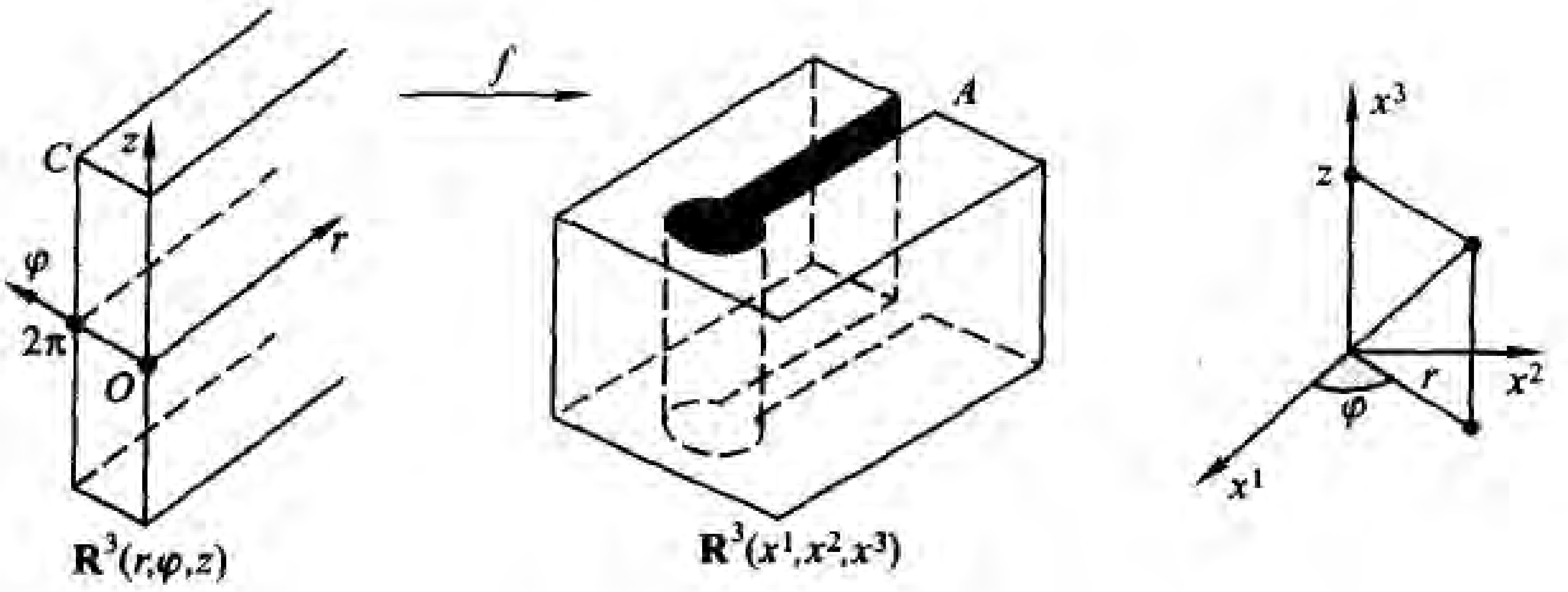


图 1.8

其变换的 Jacobi 行列式等于 r. 于是,在区域 A 中柱面坐标系是正则的. 这是因为 Jacobi 行列式仅在 z 轴的点上等于0;而通过 z 轴的半平面,为了保证双方单值性而除去了.

现在我们考察 n 维欧氏空间,并引进球面坐标系. 变换公式为

$$f_n:C(r,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})\to A(x^1,\cdots,x^n);$$

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\,\theta_1, \\ x^2 = r\sin\,\theta_1\cos\,\theta_2, \\ x^3 = r\sin\,\theta_1\sin\,\theta_2\cos\,\theta_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{n-1} = r\sin\,\theta_1\sin\,\theta_2\cdots\sin\,\theta_{n-2}\cos\,\theta_{n-1}, \\ x^n = r\sin\,\theta_1\sin\,\theta_2\cdots\sin\,\theta_{n-2}\sin\,\theta_{n-1}. \end{cases}$$

注 这组公式的构造是清楚的,认为每一行都有相同的来历,只是参数 θ_i,在足标 $i=n$ 时,等于0,这种看法是适宜的. Jacobi 矩阵和 Jacobi 行列式由读者自己计算.

对三维空间,球面坐标常用(r,θ,φ)表示;此时变换公式具有形式:$x^1 = r\sin\,\theta\,\cos\,\varphi$;$x^2 = r\sin\,\theta\sin\,\varphi$;$x^3 = r\cos\,\theta$;$0<\theta<\pi$,$0<\varphi<2\pi$,$r\geqslant 0$. 在这样的坐标下,$J=r^2\sin\,\theta$. 区域 C 和 A 表示在图 1.9 中. 这个变换的 Jacobi 行列式仅在 x^3 轴上为0;为了保证坐标系的双方单值性,还要除去半平面$(x^2=0,x^1\geqslant 0)$. 在固定 r 时,参数 θ,φ 的坐标曲线表示在图 1.10 中. 这两个角参数有时称为纬度和经度. 它们在地球仪上给出坐标网. 在三维的情形 Jacobi 矩阵具有形式:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \sin\,\theta\cos\,\varphi & r\cos\,\theta\cos\,\varphi & -r\sin\,\theta\sin\,\varphi \\ \sin\,\theta\sin\,\varphi & r\cos\,\theta\sin\,\varphi & r\sin\,\theta\cos\,\varphi \\ \cos\,\theta & -r\sin\,\theta & 0 \end{pmatrix}$$

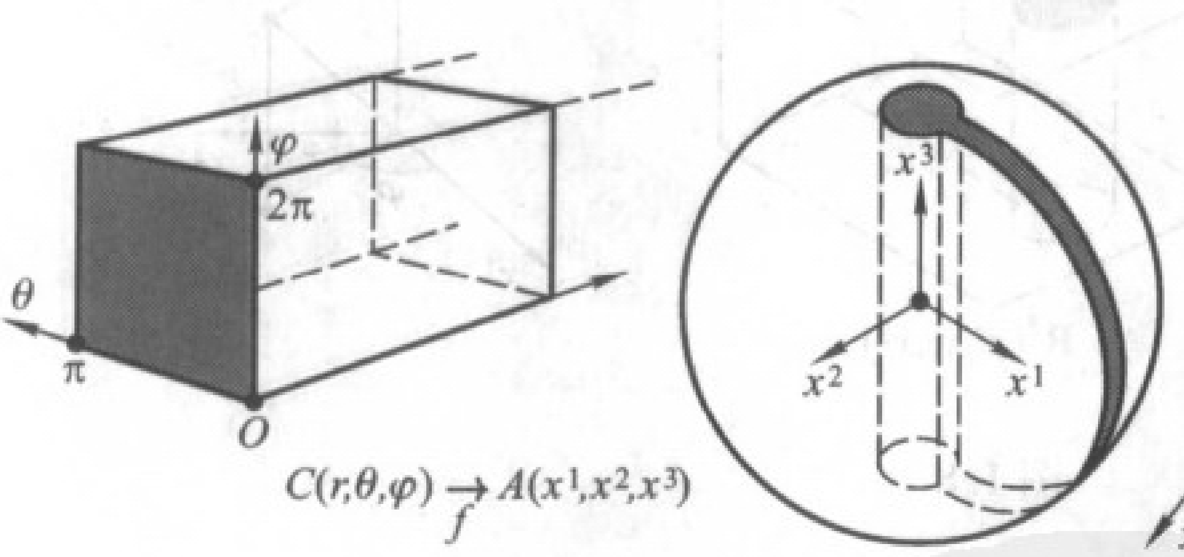


图 1.9

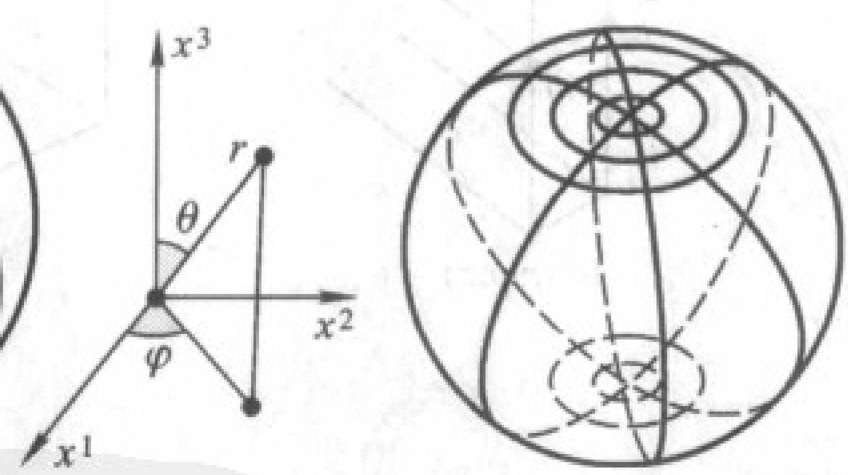


图 1.10

习 题

1. 证明函数组 $u=x+\sin y, v=y-\dfrac{1}{2}\sin x$ 在平面上给出了正则坐标系.

2. 证明在圆周 S^1 上不能给出一个统一的坐标系.

3. 在极坐标系下写出 Laplace 方程 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.2 在曲线坐标系中曲线的长

1.2.1 在欧氏坐标系中曲线的长

我们考察欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，并在 $\mathbf{R}^n$ 中给出欧氏数量积：$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle=\sum\xi^i\eta^i$，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$. 此时，可以将每个向量 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$，可以按公式 $|\boldsymbol{\xi}|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle}$ 计算它的模或长. 如果我们想确定任意两点 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$ 之间的距离，那么就应计算向量 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}$ 的长. 从解析几何知道，两个向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$ 之间的角 φ，也能用数量积由公式 $\cos\varphi=\dfrac{\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle}{|\boldsymbol{\xi}|\cdot|\boldsymbol{\eta}|}$ 来表示. 我们看到，像向量的长和向量间的角这样重要的度量概念是与欧氏空间中的数量积紧密联系着的. 在建立其他重要的几何概念时，常常借助于各种向量的数量积的公式.

我们来给出光滑曲线长的定义. 为此，以参数形式给出曲线 $\gamma(t)$，即认为欧氏空间中的光滑曲线由一组 n 个光滑函数 $x^1(t),\cdots,x^n(t)$ 给出，其中参数跑过整个实数轴或一个有限区间 $[a,b]$. 这里，$x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的笛卡儿坐标.

定义 1 数 $l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle}dt$ 称为曲线 $\gamma(t)$ 从点 $\gamma(a)$ 到点 $\gamma(b)$（或从参数值 $t=a$ 到参数值 $t=b$）的**长**，其中 $\dot\gamma(t)$ 是具有坐标 $\left(\dfrac{dx^1(t)}{dt},\cdots,\dfrac{dx^n(t)}{dt}\right)$ 的向量，有时称为曲线 $\gamma(t)$ 在点 t 的**速度向量**，或称为曲线 $\gamma(t)$ 在点 t 的**切向量**.

曲线长的显式公式为：

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}dt.$$

引理 1 在光滑曲线 $\gamma(t)$ 上给定两点 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$. 若 $t=t(\tau)$ 是参数 t 换为新的参数 τ 的任何光滑的变换，$\dfrac{dt}{d\tau}>0$，那么曲线长 $l(\gamma)\Big|_\alpha^\beta$ 不变，即总成立等式 $l(\gamma(t))\Big|_a^b=l(\gamma(\tau))\Big|_\alpha^\beta$，这里 $a=t(\alpha)$，$b=t(\beta)$.

证明 直接计算，得

$$\begin{aligned}l(\gamma(t))\Big|_a^b&=\int_a^b\sqrt{\langle\dot\gamma_t,\dot\gamma_t\rangle}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\frac{dt}{d\tau}d\tau\\&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle}\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\dot\gamma_\tau,\dot\gamma_\tau\rangle}d\tau,\end{aligned}$$

其中 $\dot\gamma_t=\left\{\dfrac{dx^1(t)}{dt},\cdots,\dfrac{dx^n(t)}{dt}\right\}$. 这就是所要证明的.

现在假定给定了欧氏空间中的两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(\tau)$，它们相交于某点 P，即存在这样的参数值 $t=a,\tau=b$，使 $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$. 我们来定义两个曲线在它们交点处的夹角.

定义 2　两条相交的光滑曲线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(\tau)$，在它们的交点 $P=\gamma_1(a)=\gamma_2(b)$ 处，若两个速度向量 $\dot{\gamma}_1(a)$ 和 $\dot{\gamma}_2(b)$ 不为零，由等式 $\cos\varphi=\dfrac{\langle\dot{\gamma}_1(a),\dot{\gamma}_2(b)\rangle}{|\dot{\gamma}_1(a)|\cdot|\dot{\gamma}_2(b)|}$ 确定的角 φ 称为此两条相交曲线在交点 P 的**交角**.

注　严格地说，这个等式确定的不是一个角，而是两个角，它们的和为 π. 但是因为曲线编了号码，那么就产生了有向角的概念，这样的角就由上面引进的公式所唯一确定了. 我们坚持两个速度向量在交点处不为 0 的要求. 问题在于在光滑曲线的速度向量变为 0 的点，这曲线可能受折损，其运动方向跳跃性地突然变化(图 1.11).

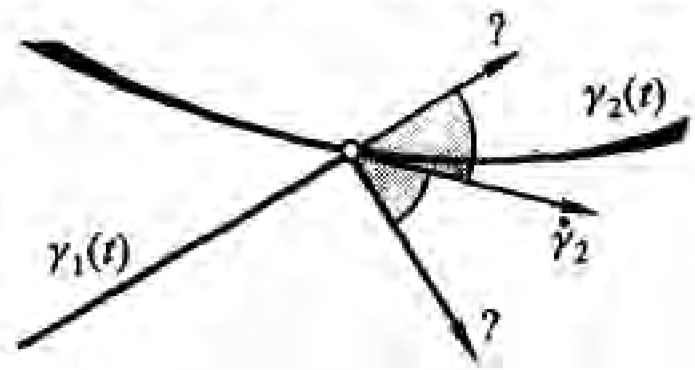


图 1.11

我们指出，在光滑曲线上存在转折点决不违背曲线的光滑性(参看光滑曲线的定义). 例如，图 1.12表示了在一点具有转折的光滑曲线；这里光滑曲线在奇点的"转折角"等于 $\pi/2$. 容易构造出在奇点有转折角 π 的光滑曲线的例子(参看图 1.13).

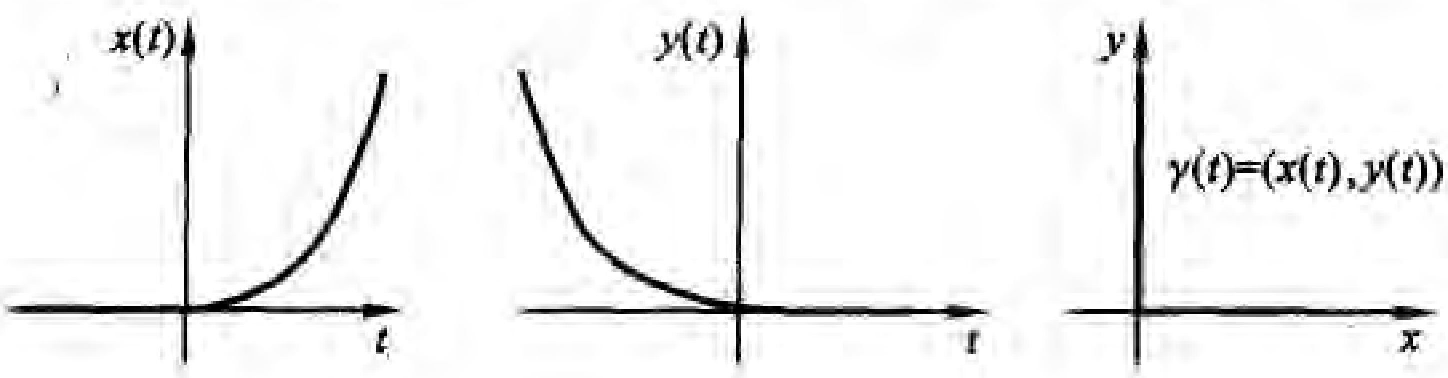


图 1.12

练习：写出图 1.13 中所描绘曲线的参数方程. 问题：图 1.13 中所描绘的曲线能用解析函数 $x(t),y(t)$ 给出吗?

请读者自己确认：按照一般公式计算的圆周长和线段长与初等几何中的已知量是相符的.

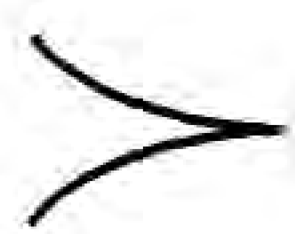


图 1.13

1.2.2　在曲线坐标系中曲线的长

现在，考察欧氏空间的区域 C 中的曲线坐标，并假设 $\gamma(t)$ 是这个区域中的任何光滑曲线. 在这个曲线坐标系中如何写出光滑曲线 $\gamma(t)$ 的长? 用 $z^1,\cdots,z^n$ 表示曲线坐标，即 $x^i=x^i(z)$；于是按复合函数的微分法则，有

$$\frac{d\dot{x}^i(t)}{dt}=\sum_k\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

即
$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i(z(t))}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_k\frac{\partial x^i(z(t))}{\partial z^k}\frac{dz^k}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{m,p}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}dt$$
$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{m,p}g_{mp}\frac{dz^m}{dt}\frac{dz^p}{dt}}dt,$$

其中函数 $g_{mp}(z)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}$. 显然,这些函数关于指标 m,p 是对称的,即 $g_{mp}=g_{pm}$;于是函数组 g_{mp} 可组成对称矩阵 $G=(g_{mp})$. 在我们得到的公式中,矩阵 G 的系数是以 Jacobi 矩阵的元素的乘积和表示的. 因为 $d\psi_{z,x}=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$,所以矩阵 G 表示为两个矩阵的乘积:$G=A\cdot A^{\mathrm T}$,这里 $A=d\psi_{z,x}$. 矩阵 $G(z)$ 在坐标变换时的变化规律如何呢? 我们再作一个变量替换,由变量 $\{z^i\}$ 变为变量 $\{y^k\}$,即考察形式为 $z^i=z^i(y^1,\cdots,y^n)$,$1\leqslant i\leqslant n$ 的正则坐标变换. 同时,把 $\{y^k\}$ 看作区域 C 中的新的曲线坐标.

这时,系数 $g_{mp}(z)$ 按下面规则变化

$$g_{lk}(y)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l}\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}=\sum_{i=1}^n\sum_{m,p}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}$$
$$=\sum_{m,p}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\right)\frac{\partial z^p}{\partial y^k}=\sum_{m,p}\frac{\partial z^m}{\partial y^l}g_{mp}(z)\frac{\partial z^p}{\partial y^k},$$

即 $G(y)=d\psi_{y,z}G(z)(d\psi_{y,z})^{\mathrm T}$.

注 有时表示新的坐标为 $z^{i'}$,在指标上写上"一撇",即表示是在新的坐标系中.

函数 $g_{mp}(z)$ 有明显的几何意义. 我们考察区域 C 中的任意点 P 和曲线坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 的经过 P 点的坐标曲线. 这些曲线中每一条都可用参数方程 $z^1=c_1,\cdots,z^{i-1}=c_{i-1},z^i=t,z^{i+1}=c_{i+1},\cdots,z^n=c_n$ 的形式给出,其中 $c_\alpha(1\leqslant\alpha(\neq i)\leqslant n)$ 是这样的常数,它们为点 P 的坐标:$z^\alpha=c_\alpha$;$1\leqslant\alpha(\neq i)\leqslant n$. 我们用 $\gamma_m(t)$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ 表示第 m 条坐标曲线. 这时 z 坐标系中的第 m 条坐标曲线在 x 坐标系中写为:$\{x^i(c_1,\cdots,c_{m-1},z^m=t,c_{m+1},\cdots,c_n)\}$,$1\leqslant i\leqslant n$.

这条光滑曲线在 P 点的速度向量的坐标 $\boldsymbol{e}_m=\left\{\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\right\}$,$1\leqslant i\leqslant n$. 因为 $g_{mp}(x)=$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$，这个表示式也可写为形式：$g_{mp}(z) = \langle e_m, e_p \rangle$，也就是说，函数 g_{mp} 是相应的坐标曲线切向量的数量积(图 1.14).

这样，我们看到在坐标变换时矩阵 $G(z)$ 像二次形式的矩阵那样变换. 若原来是笛卡儿坐标，那么矩阵 G 是单位矩阵，于是在任何另外(曲线)坐标系中，它可以写为 $G(z) = AEA^{\mathrm{T}}$，这里 $A = d\psi_{z,x}$，$\{x^i\}$ 是笛卡儿坐标.

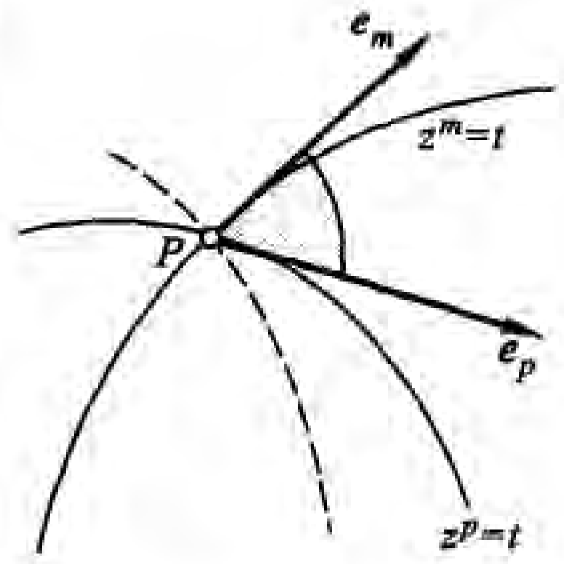


图 1.14

在作进一步讨论之前，我们先来考察在不同的曲线坐标中曲线长公式的最简单的例子. 对这些曲线坐标顺便算出矩阵 G.

1. 平面上的极坐标(r,φ). 在笛卡儿坐标(x^1,x^2)下，矩阵 G 为 $G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，即 $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$ 前面已计算出 Jacobi 矩阵. 由此

$$G(r,\varphi) = d\psi(d\psi)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

于是在极坐标中，所给曲线 $\gamma(t) = (r(t),\varphi(t))$ 的长，根据公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

2. 三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的柱面坐标(r,φ,z). 矩阵 $G(x)$ 在笛卡儿坐标(x^1,x^2,x^3)下为 $G(x) = E$. 前面已算出其 Jacobi 矩阵，由此

$$G(r,\varphi,z) = d\psi(d\psi)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是在柱面坐标系下所给曲线 $\gamma(t) = (r(t),\varphi(t),z(t))$ 的长，根据公式可表示为

$$l(\gamma(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

作为一个例子，我们来计算直圆柱面上螺线的长，此螺线由参数方程 $r(t) = R$ = 常数，$\varphi(t) = \omega t$，$z = qt$ 给出. 此时，

$$l(\gamma)\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{R^2\omega^2 + q^2}\, dt = (R^2\omega^2 + q^2)^{1/2}(b-a).$$

3. 三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的球面坐标(r,θ,φ). 在笛卡儿坐标(x^1,x^2,x^3)下，矩阵 G 为 $G(x) = E$. Jacobi 矩阵前面已算过，由此

$$G(r,\theta,\varphi)=d\psi(d\psi)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

于是在球面坐标系下，所给曲线 $\gamma(t)=(r(t),\theta(t),\varphi(t))$ 的长，按照公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

有时仅写出弧长微分 dl 的显式来代替弧的全长的表示式常常是方便的. 特别是在上面所分析的例子中，这些微分取如下的形式：在平面极坐标中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2$；在 $\mathbf{R}^3$ 的柱面坐标中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2+(dz)^2$；在 $\mathbf{R}^3$ 的球面坐标中，$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$.

1.2.3 在欧氏空间区域中黎曼度量的概念

我们把区域 C 中的每一个曲线坐标系 z 与一个光滑的矩阵函数 $G(z)$ 相对应，这矩阵函数 $G(z)$ 在坐标变换时，像二次型那样变换.

定义 3 如果在欧氏空间区域 C 的每个正则坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 中定义了一组光滑函数 $g_{mp}(z^1,\cdots,z^n)$，满足：(1) $g_{mp}(z)=g_{pm}(z)$（即矩阵 $G(z)$ 是对称的）；(2) 矩阵 $G(z)=(g_{mp})$ 是非退化的和正定的；(3) 在坐标变换 $z\to y$ 时，矩阵 $G(z)$ 按照规则 $G(y)=d\psi G(z)(d\psi)^{\mathrm{T}}$ 变换（提醒一下，我们仅考虑坐标系的正则变换），这里 $d\psi$ 表示坐标变换的 Jacobi 矩阵 $d\psi_{y,z}$，那么我们说在欧氏空间区域 C 中给出了**黎曼度量**.

注 为简化像 $\sum_i a_ib^i$ 那样按重复指标（一个上指标，一个下指标）进行求和的表示式符号，我们省略掉符号"$\sum$"，简写为"a_ib^i"，这就意味着关于 i 求和.

定义 4 若在区域 C 中给出了黎曼度量 $G(z)=(g_{ij})$，并在坐标系 (z^i) 中给出了光滑曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t)=\{z^i(t)\}$，则称数

$$l(\boldsymbol{\gamma})\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(z)\,\frac{dz^i(t)}{dt}\,\frac{dz^j(t)}{dt}}\,dt$$

为曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 从点 $\boldsymbol{\gamma}(a)$ 到点 $\boldsymbol{\gamma}(b)$ 的长.

上述黎曼度量的定义现在可以用比较不变的术语来叙述. 这就是，黎曼度量的给出能够在经过区域中每一点的所有光滑曲线的切向量的集合上定义二次型 $\langle\ ,\ \rangle_g$. 确实，若 $\gamma_1(0)=P=\gamma_2(0)$，$P\in C$，则对向量 $\boldsymbol{\xi}=\dot{\gamma}_1(0)$ 和 $\boldsymbol{\eta}=\dot{\gamma}_2(0)$，这里 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$，$\boldsymbol{\eta}=(\eta^1,\cdots,\eta^n)$，可以令 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_g=g_{ij}\xi^i\eta^j$.

引理 2 映射 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\to\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_g$ 给出了光滑地依赖于点的非退化正定的二次型.

证明 所作映射的对称性和双线性由定义 3 得到. 我们来确认这个对应定义了双线性型. 作正则坐标变换 $\{z^i\}\to\{z^{i'}\}$，这时

$$\gamma_1(t)=\{z_1^1(t),\cdots,z_1^n(t)\},\quad \gamma_2(t)=\{z_2^1(t),\cdots,z_2^n(t)\};$$

$$\xi^{i'}=\frac{dz^{i'}}{dt}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\frac{dz^i}{dt}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\xi^i;\eta^{i'}=\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\eta^i;g_{i'j'}=\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}g_{ij}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}'\rangle_{g'}&=g_{i'j'}\xi^{i'}\eta^{j'}\\&=\left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}\right)\left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}}\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p}\right)g_{ij}\xi^k\eta^p=\delta^i_k\delta^j_pg_{ij}\xi^k\eta^p\\&=g_{ij}\xi^i\eta^j=\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_g,\end{aligned}$$

这就是说，$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_g$ 确实是双线性型. 在证明中利用了$\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k}=\delta^i_k$. 引理证毕.

于是，黎曼度量的定义可用如下的术语给出：若在欧氏空间区域 C 中每一点，对切于过此点的光滑曲线的向量给出了非退化正定的双线性型(数量积)，那么我们就说在区域 C 上给出了黎曼度量.

由引理 2 得到这个定义与定义 3 是等价的. 特别是，由引理 2 得到光滑曲线的长与曲线坐标的选择是无关的.

若两条光滑曲线 γ_1 和 γ_2 在 P 点相交(使 $\gamma_1(0)=\gamma_2(0),\dot{\gamma}_1(0)\neq0,\dot{\gamma}_2(0)\neq0$)，它们之间在给定的黎曼度量下的交角 φ，由

$$\cos\varphi=\frac{\langle\dot{\gamma}_1,\dot{\gamma}_2\rangle}{|\dot{\gamma}_1||\dot{\gamma}_2|}$$

给出.

黎曼度量存在吗？我们上面已经援引了例子. 事实上，若在区域 C 中的笛卡儿坐标下给出矩阵 $G(x)=\delta_{ij}$(这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是区域 C 中的笛卡儿坐标)，那么在由笛卡儿坐标经正则变换得到的任何其他曲线坐标 z，可以按定义令 $G(z)=d\psi G(x)(d\psi)^{\mathrm{T}}=d\psi(d\psi)^{\mathrm{T}}$，这里 $d\psi$ 是所给变换的 Jacobi 矩阵. 这样，我们就定义了在欧氏空间区域中给定的黎曼度量. 这个度量是欧氏度量，并且光滑曲线弧长微分的平方在笛卡儿坐标下写为$(dl)^2=\sum\limits_{i=1}^n(dx^i)^2$. 但是，若给出的是任意的黎曼度量，那么我们不应该希望通过区域 C 中适当的坐标变换使这个度量化为$\sum\limits_{i=1}^n(dx^i)^2$的形式. 一般情况下，这是不正确的.

定义 5 在区域 C 中给定黎曼度量 G，若在区域 C 中存在这样的坐标 y(一般地说，是曲线坐标系)，在此坐标系下 $G(y)$ 变为单位矩阵，则称此黎曼度量 G 是欧氏的.

假使给出的是欧氏度量，那么可以写出使这个度量也是欧氏形式的所有另外的坐标系，即单位矩阵. 这里我们仅指出，所有这样的坐标系可以从一个坐标系用欧氏空间的旋转、平移和反射的方法得到.

"非欧度量",即用任何正则坐标变换都不能化成形式为 $\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ 的度量,它的存在性暂时还无可推得. 目前我们还不能指出这样的黎曼度量,可确定无疑地断定它是非欧度量. 但是,不久我们就能做到. 直观上很明显,为揭示出这样的度量,需要找出在坐标的正则变换下保持不变的属于这个度量的某种不变量. 那时,我们希望能比较两个度量的不变量,并揭示出这些不变量的不同,从而揭示出两个度量的不等价性. 这样的一些不变量实际上是存在的,并且我们能很快地确定它们. 只有到那时,我们才能严格地证明定义在欧氏空间区域中的非欧度量的存在性.

在曲线坐标 z 下写出的欧氏度量失去了它的简单的"欧氏形式"并由矩阵 $G(z)$ 给出,这时"辨别"欧氏度量就不那么简单. 我们来看看在上面所指出简单的曲线坐标系中如何写出欧氏度量. 不写出黎曼度量的矩阵 $G(z)$,而写出光滑曲线弧长微分的平方 $(dl)^2=g_{ij}(z)dz^idz^j$ 常常是方便的.

1. 在平面极坐标中:$(dl)^2=dr^2+r^2d\varphi^2$.
2. 在三维空间柱面坐标中:$(dl)^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$.
3. 在三维空间球面坐标中:$(dl)^2=dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$.

1.2.4 不定度量

到现在为止,我们遇到的仅是所谓黎曼度量的正定度量. 但是在应用中常常遇到所谓不定度量.

定义 6 假设在欧氏空间区域 C 的每一个正则坐标系 $z^1,\cdots,z^n$ 中定义了一组光滑函数 $\{g_{mp}(z^1,\cdots,z^n)\}$,它们满足除正定要求外的加在黎曼度量上的所有要求(参看定义 3),也就是说所对应的二次型不是正定的,那么就说在区域 C 中给出了**不定度量**.

我们考察伪欧空间 $\mathbf{R}^n_s$ 中的所谓指标 s 的伪欧度量作为不定度量的最简单例子. 为了构造这个度量,在笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 下的通常的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,并在每一点 $P\in\mathbf{R}^n$ 给出下面的双线性型(具有常系数,即与点无关的系数):$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_s=-\sum_{i=1}^{s}\xi^i\eta^i+\sum_{j=s+1}^{n}\xi^j\eta^j$. 于是,对光滑曲线 $\gamma(t)=\{x^i(t)\}$,$1\leqslant i\leqslant n$,其弧长按公式表示为

$$l(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{-\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2+\sum_{j=s+1}^{n}\left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\,dt.$$

在 $n=4$ 时,指标为 1 的伪欧空间有时称为 Минковский(Minkowski)空间(在狭义相对论中);同样我们也将考察 $\mathbf{R}^3_1$ 和 $\mathbf{R}^2_1$,我们指出,指标为 0 的伪欧空间就是通常的欧氏空间.

也像在通常欧氏空间一样,在空间 $\mathbf{R}^n_s$ 中向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的长由公式 $|\boldsymbol{\xi}|_s=\sqrt{\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_s}$,定

义,但在 $\mathbf{R}_s^n$ 中不同于在 $\mathbf{R}^n$ 中,向量的长可以是零和虚数. 事实上,因为形式 $\langle\ ,\ \rangle_s$ 不是正定的,所以,例如从坐标原点发出的所有向量 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}_s^n$ 的集合分为 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_s<0$(**类时向量**),$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_s=0$(**光向量或迷向向量**),$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_s>0$(**类空向量**)这三个不相交的集合. 这种情况导致了有零长、实长和虚长向量的情况. 确实,类时向量具有虚数长,光向量(迷向向量)具有零长,而类空向量具有实数长. 例如,坐标原点发出的迷向向量填满了顶点在坐标原点的整个锥面: $-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2+\sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2=0$;类时向量位于锥面的"内部",即在由坐标平面$(x^1,\cdots,x^s)$确定的锥面腔内;而类空向量位于光锥面的"外部"(图 1.15).

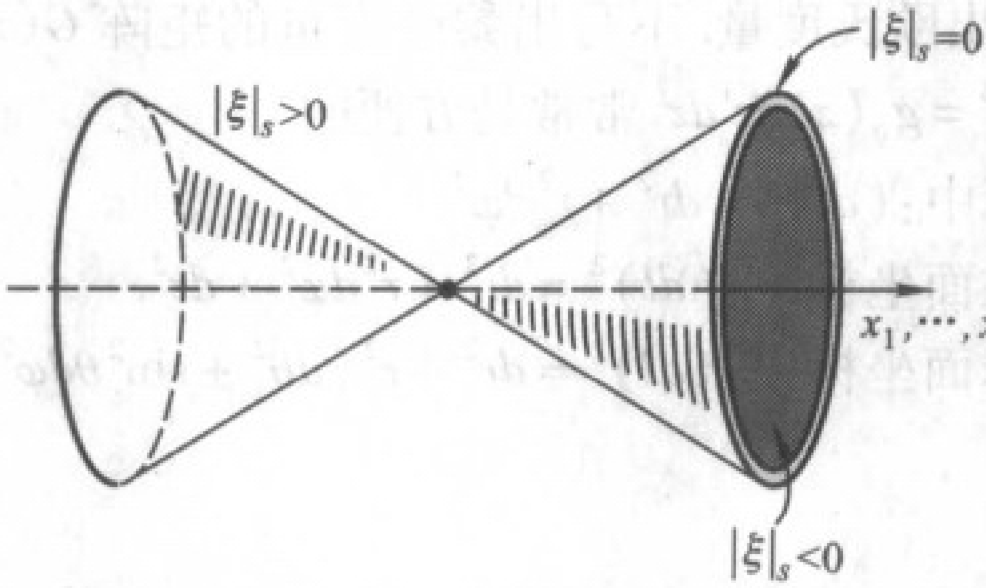


图 1.15

注　在(狭义相对论中的)Минковский 空间 $\mathbf{R}_1^4$ 中,迷向锥面全部由所谓"光向量"$\boldsymbol{\xi}$(即$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_1=0$)组成,并称为**光锥**,由坐标原点发出的光线,将沿此锥面的一条母线传播.

我们定义指标 s 的伪欧空间 $\mathbf{R}_s^n$ 中光滑曲线的长

$$l_s(\gamma)\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle_s}\,dt.$$

与欧氏情形不同之处在于:某条曲线的长可能是零,纯虚数和复数.

为了更方便地表示狭义相对论的某种效应而引进 Минковский 空间 $\mathbf{R}_1^4$,我们在空间 $\mathbf{R}_1^4$ 中引入坐标 $x^0=ct,x^1=x,x^2=y,x^3=z$,就是说$(dl)^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$,其中 t 是时间,c 是光速. 我们考察任何物质的微粒的所谓"**宇宙线**"$\gamma(t)$,它是空间 $\mathbf{R}_1^4$ 中的光滑轨线. 如果坐标 x,y,z 解释为空间的坐标,那么微粒沿此轨线的运动可以解释为某个在三维欧氏空间中迁移的质点在时空中的进化. 像以前一样,假设 $\dot{\gamma}$ 是轨线 $\gamma(\tau)$ 在点 τ 的切向量;那么因为在狭义相对论中采用任何信号的传播速度不能超过光速 c 的假说,所以

$$cdt>\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

这里(cdt,dx,dy,dz)是沿着轨线$\gamma(\tau)$在切向量$\dot{\gamma}(\tau)$的方向上的无穷小位移向量的坐标. 由此我们得到沿着物质微粒的宇宙线$\gamma(\tau)$总是满足关系式$-cdt^2+dx^2+dy^2+dz^2<0$，即$\langle\dot{\gamma}(\tau),\dot{\gamma}(\tau)\rangle_1<0$. 这就是说，切于宇宙线的每个切向量是类时的向量. 由此也得到物质微粒的宇宙线总是取虚数长. 特别是，宇宙线全部严格地在光锥(迷向锥面)内传播，此锥面以t轴为自己的轴. 这个条件在宇宙线的每一点都应满足(参看图1.16).

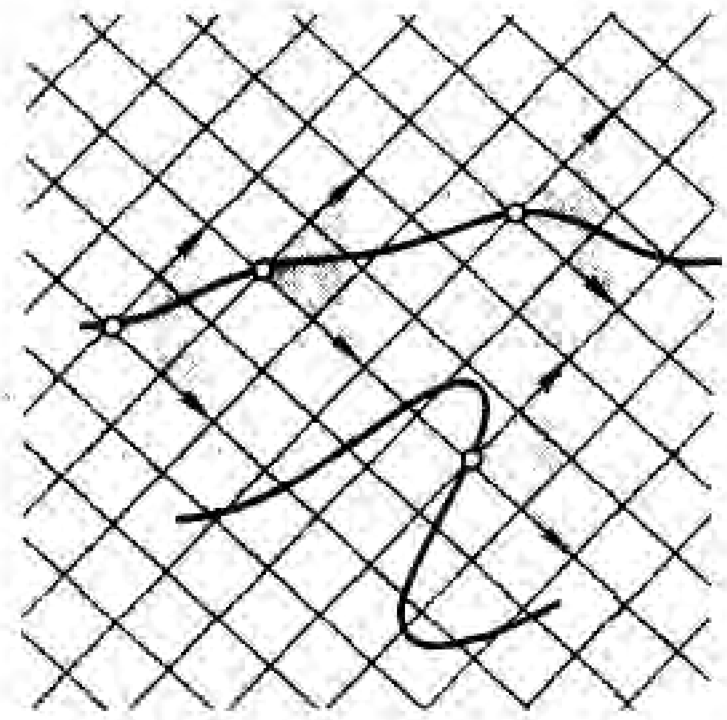


图1.16

习 题

1. 验证：曲线长可以作为依次连接曲线上有限个点的线段所组成的折线，当最长的线段趋于0时的极限.

2. 证明：在欧氏空间，连接两点的曲线中以直线的长为最短.

1.3 球面和平面上的几何

我们考察二维欧氏平面，它具有笛卡儿坐标x,y，并被赋予欧氏度量$dl^2=dx^2+dy^2$. 为表示光滑曲线弧长的无穷小元素，除用dl^2外，有时也用记号ds^2. 我们将使用这两种符号. 若在平面上引进极坐标，则中心在原点的圆周成为形如$r(t)=$常数的坐标曲线. 在极坐标系中圆弧长的无穷小元素等于$rd\varphi$.

现在，我们考察二维球面到三维欧氏空间中的**标准嵌入**，在引入笛卡儿坐标x,y,z的三维欧氏空间中，它是以坐标原点为起点长为R的向量终点的集合. 先谈谈下面一般的问题. 假设在球面S^2上有某条光滑曲线$\gamma(t)$，并且计算这个曲线的长. 于是可以考虑外围的三维欧氏度量$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$，而把光滑曲线写成参数形式$\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$，并且按照上面所说明的方案计算它的长. 同样，可以计算在球面上两条相交曲线$\gamma_1(t),\gamma_2(t)$的角.

在$\mathbf{R}^3$中引用球面坐标(r,θ,φ)，这时，半径为R的球面由方程$r=R=$常数给出. 我们来计算整个都在球面S^2上的两条曲线切向量的数量积. 设$\gamma_1(t)=(R,\theta_1(t),\varphi_1(t))$，$\gamma_2(t)=(R,\theta_2(t),\varphi_2(t))$，于是

$$\dot{\gamma}_1(t)=(0,\dot{\theta}_1,\dot{\varphi}_1),\quad \dot{\gamma}_2(t)=(0,\dot{\theta}_2,\dot{\varphi}_2),$$

$$\langle\dot{\gamma}_1,\dot{\gamma}_2\rangle=R^2(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\sin^2\theta(t)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2),$$

此公式在曲线$\gamma_1(t)$与$\gamma_2(t)$交点计算. 由此可见，我们所计算的数量积与两个向量$(\dot{\theta}_1,\dot{\varphi}_1)$，$(\dot{\theta}_2,\dot{\varphi}_2)$关于新的双线性形式$R^2(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\sin^2\theta(t)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$的数量积相符合. 这个双线性形式定义了二次形式$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$，它是由欧氏空间中的相

应的二次形式 $dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ 用变量 θ,φ 的新的函数 $r=R=$ 常数，$\theta=\theta,\varphi=\varphi$ 代替变量 r,θ,φ 而得到. 我们说，引进这种运算以后所得到的球面 S^2 上黎曼度量 $R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ 是外围三维空间的欧氏度量在球面上的**诱导度量**.

在球面 S^2 上，点的位置可用两个参数 θ,φ（纬度和经度）给出，于是点在球面上的向径可以表示为 $x=x(\theta,\varphi)=R\cos\theta\cos\varphi, y=y(\theta,\varphi)=R\cos\theta\sin\varphi, z=z(\theta,\varphi)=R\sin\theta$. 将此三个函数（依赖两个参数）代入三维空间中弧长微分的平方表示式 $dx^2+dy^2+dz^2$，得到 $(dx(\theta,\varphi))^2+(dy(\theta,\varphi))^2+(dz(\theta,\varphi))^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$.

这个具体的例子今后将被我们有力地概括，并且也是在欧氏空间中的曲面上诱导黎曼度量的特殊的情况. 在球面 S^2 上也可引进另外的曲线坐标，这在计算时有时用得着. 我们来导出这些坐标的基本例子.

考察球面 S^2 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的球极射影. 为此，把半径为 R 的球面的球心放在坐标原点 O，并研究通过 O 点的坐标平面 $\mathbf{R}^2(x,y)$；在球面 S^2 上也标出北极 N 和南极 S. 设 P 为球面上不同于 N 的点；连接北极 N 和 P，并延长 NP，交平面 $\mathbf{R}^2(x,y)$ 于 Q. 将点 P 与点 Q 相对应，我们得到映射 $\varphi_0:S^2\to\mathbf{R}^2$，并称它为球面的**球极射影**. 映射 φ_0 在除北极 N 以外的球面的所有点上有定义. 可以设想北极"映射"为二维平面的无穷远点（参看图 1.17）.

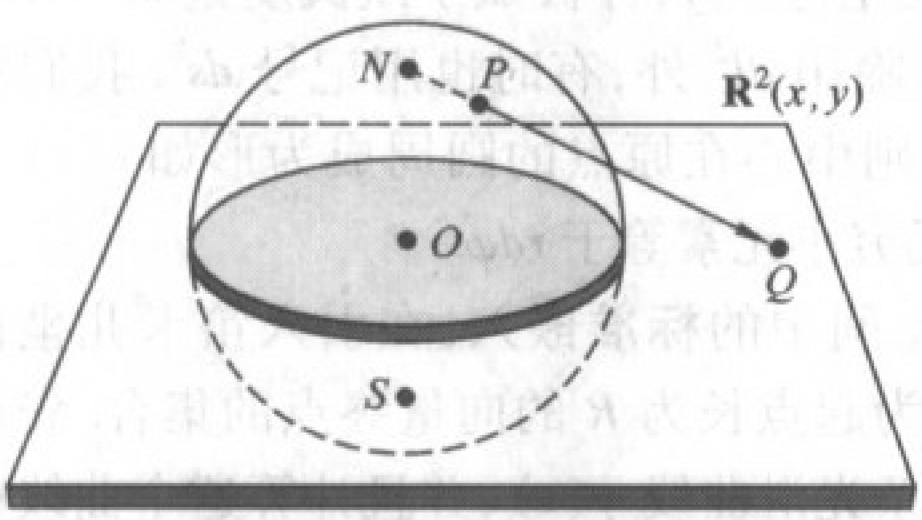


图 1.17

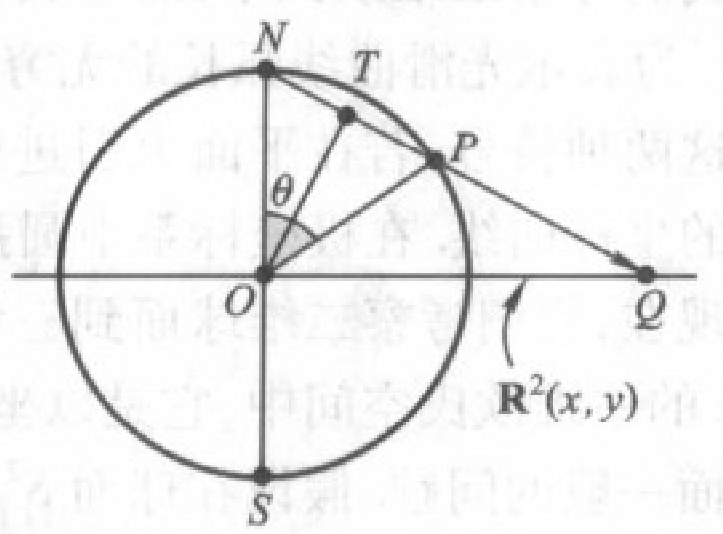


图 1.18

我们观察 $\mathbf{R}^3$ 中的球面坐标 r,θ,φ，它诱导出球面上的坐标 (θ,φ)，而在平面 $\mathbf{R}^2$ 上出现坐标 (r,φ)，即极坐标. 因为映射 φ_0 保持坐标 φ 不变，所以为了定义 φ_0，找出半径 r 依赖于角 θ 的关系式就足够了. 为此，我们观察用过点 P,O,N 的平面去截 S^2 所得的截面（图 1.18）. 因为角 ONT 等于 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，于是得到坐标变换的公式为 $\varphi=\varphi; r=R\cot\frac{\theta}{2}$.

不难验证，这个变换的 Jacobi 行列式 $J=-\dfrac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$；于是在除北极外的所有

点，变换是正则的. 因而借用平面极坐标，在球面上可以引进坐标. 在此新的坐标下球面的黎曼度量取怎样的形式? 容易验证，度量 $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ 现在可以写为：

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

我们所得到的球面的度量形式仅在一个可变因子 $\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}$ 上不同于平面上在极坐标下写出的欧氏度量 $(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. 这样的两个度量称为是共形的.

定义 1 在欧氏空间区域 C 中的曲线坐标 $z_1, \cdots, z_n$ 下给出黎曼度量 $g_{ij}(z)$，它具有形式 $g_{ij}(z) = \lambda(z) g_{ij}^e(z)$，这里 $\lambda(z)$ 是区域 C 中的光滑函数，而 $g_{ij}^e(z)$ 是在坐标 $z^1, \cdots, z^n$ 下写出的欧氏度量的分量，则称 $g_{ij}(z)$ 为**共形度量**. 换句话说，若存在坐标系 x，使 $g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum_{k=1}^{n} (dx^k)^2$ 时，则称度量 $g_{ij}(z)$ 是共形的.

于是，在欧氏平面上出现了两个度量：$dr^2 + r^2 d\varphi^2$，欧氏的；和 $\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$，球面度量，它们可以认为给在同一个定义域 $\mathbf{R}^2(x,y)$ 上. 回到关于等价度量的问题上来. 是否存在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正则坐标变换，使度量 $dr^2 + r^2 d\varphi^2$ 转化为度量 $\frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$?

我们至少提出这两个度量不等价的这个事实的直观论据. 为此，我们用欧氏度量和用球面度量来计算圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的长. 在欧氏度量中已知圆周长为 $l_e = 2\pi a$，a 是半径. 我们来求在球面度量中圆周的长. 首先，求出半径 a 的欧氏度量和它在球面度量下的量 ρ 之间的关系式. 我们有

$$\rho = 2\int_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr = 2R\arctan\left(\frac{a}{R}\right);$$

$$l_c = 2\int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cdot a d\varphi}{R^2 + a^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2 + a^2} = 2\pi R \sin\frac{\rho}{R} \text{①}$$

(参看图 1.19). 几何上，量 ρ 表示出圆周上从变点到北极之间连接的径线之长.

特别，当 $\rho \to 0$ 时，即对于半径很小的圆周来说，得到 $l_c \sim 2\pi\rho$，也就是说我们得到的公式转变为平面圆周长度的表达式. 比较两个公式："半径为 ρ 的圆周的'欧氏'长 $= 2\pi\rho$"和"半径为 ρ 的圆周的'球面'长 $= 2\pi R \sin\frac{\rho}{R}$"，我们看到，这两个是不同的；特别，一个是线性的，而第二个是周期的.

我们看到，同半径的圆周长的公式，在欧氏度量和球面度量中是不同的. 这说

---

① 原书为 $\sin\rho$，疑为笔误. 由译者改作 $\sin\frac{\rho}{R}$.

明了两个度量是不等价的,或通常称为是不等长的. 严格地证明它们的不等价性,将在以后进行. 事实上,凸的球面不可能保持其曲线长而变形到欧氏平面某个区域. 若回想一下,压扁一块球面成平面,需要怎样的力,与将直圆柱撑开展成平面要加怎样的力,两者比较一下,上面这个事实是可以想像的.

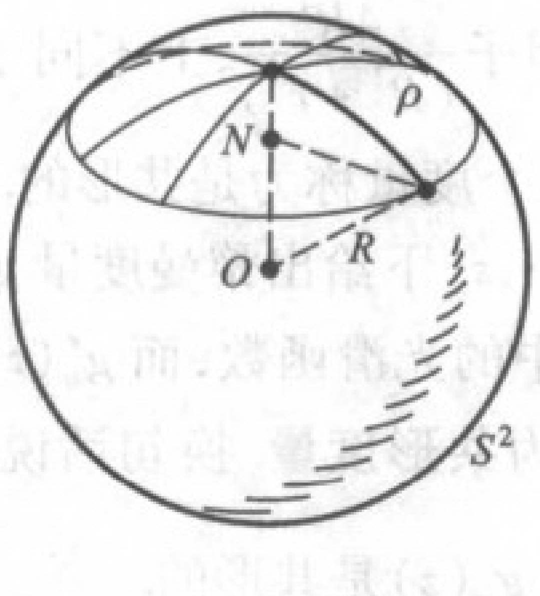


图 1.19

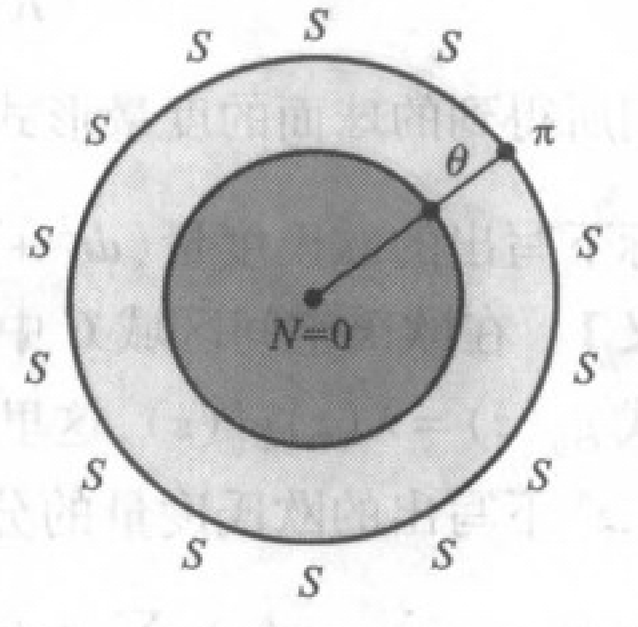


图 1.20

上面所进行的球面上圆周长的计算也可直接地在球面坐标(θ,φ)下进行. 在此坐标下,球面的度量为$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$. 这个度量的定义域可认为是变量为$\theta,\varphi$的欧氏平面上半径为$\pi$的圆盘. 在这个坐标下,很明显,半径为$\theta$的圆周长等于$2\pi R\sin\theta$(图 1.20). 同时,点$O$自然地与球的北极相重合,而边缘的圆周(半径为$\pi$)一点,这点也与球的南极相重合.

现在研究计算球面上光滑曲线长的问题. 取所谓斜驶线——与球面每一条经线交于同样的角α的轨线——作为例子. 问题:求这曲线从任何点$\gamma(a)$到$\gamma(b)$的长. 我们指出,这个曲线在航行理论上是很有名的——按照它可方便地开辟飞机航线.

我们要求出斜驶线的方程. 在球极射影时,经线转变为平面上过坐标原点的射线. 于是斜驶线在平面上是以同一角α交于这些射线的曲线. 这个结论由球极射影保持相交曲线间的角度这个更一般的事实得到. 这样的变换称为是共形的. 更确切地说,我们所指的是:考察外围的欧氏度量在球面上所诱导的球面度量,并假设两条相交曲线在交点的交角为$\alpha(\dot{\gamma}_1,\dot{\gamma}_2)$(假定角是定向的(参看图 1.21)). 曲线

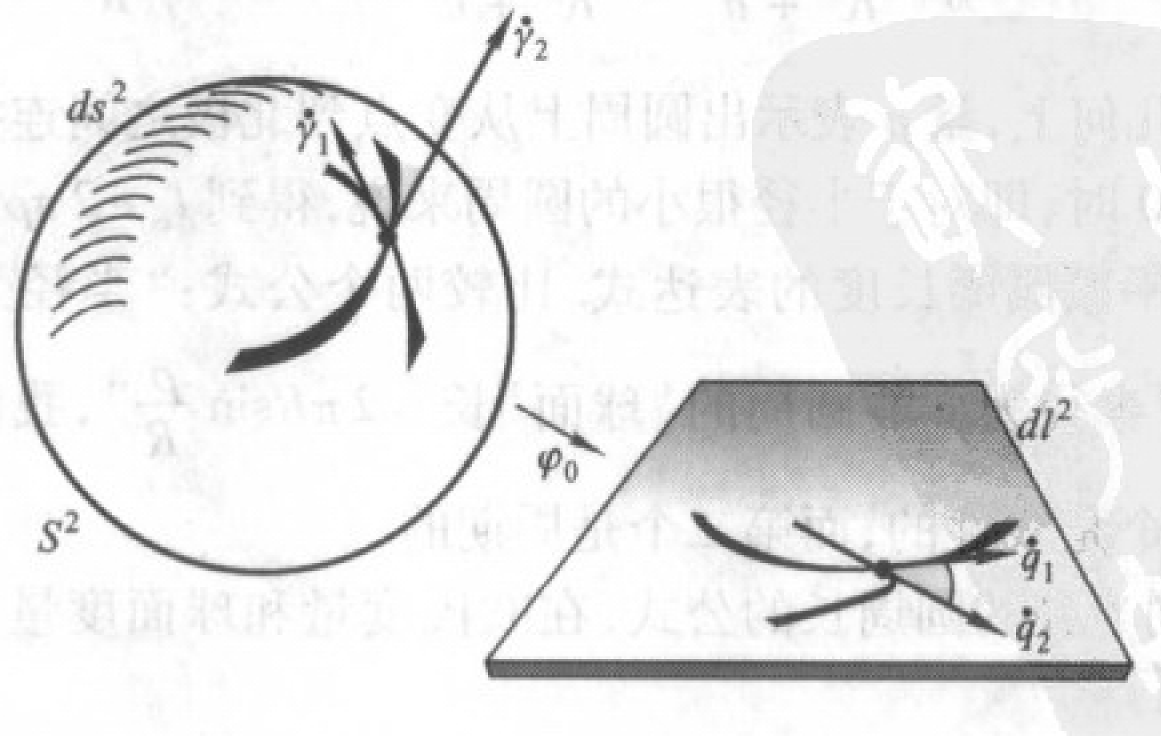


图 1.21

γ_1 和 γ_2 在球极射影下变为某两条曲线 q_1 和 q_2，它们之间的夹角在平面欧氏度量 dl^2 下计算时，用 $\beta(\dot{q}_1,\dot{q}_2)$ 表示.

引理 1 对任何相交曲线 γ_1 和 γ_2，等式 $\alpha(\dot{\gamma}_1,\dot{\gamma}_2)=\beta(\dot{q}_1,\dot{q}_2)$ 总成立.

证明 比较角 α 和 β 的显式公式，并且利用经球极映射 φ_0 后在平面 $\mathbf{R}^2$ 的极坐标下的球面度量的公式就足以证明.

实际上还成立更一般的结论.

引理 2 设 $g_{ij}(z)$ 和 $q_{ij}(z)$ 是欧氏空间区域 C 中曲线坐标 $(z^1,\cdots,z^n)$ 下的两个度量，若对每一点 $(z)\in C$，都成立 $g_{ij}=\lambda q_{ij}$，$\lambda=\lambda(z)$ 是光滑函数，则在这两个度量下计算的相交曲线间的角是一样的.

证明 逐字逐句地重述引理 1 中的推证即可.

现在回到斜驶线问题上来. 由于引理 1，找出它在欧氏平面上的方程即可. 保持角 α 不变的条件就是 $\dfrac{\langle(\dot{r},\dot{\varphi}),(1,0)\rangle}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}}=\cos\alpha=$ 常数，其中 $(\dot{r},\dot{\varphi})=\dot{\gamma}$ 是斜驶线的切向量，$(1,0)$ 是射线 ($r=t,\varphi=$ 常数) 的速度向量. 由此，$\dfrac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}}=\cos\alpha=$ 常数，从而 $\dfrac{\dot{r}}{r}=\dot{\varphi}\cot\alpha$；$r=c\cdot e^{\varphi\cot\alpha}$，这里 $c=$ 常数. 令 $\varphi=t$，有 $\dot{r}=c\cot\alpha e^{\varphi\cdot\operatorname{ctan}\alpha}$；$\dot{\varphi}=1$. 计算曲线的弧长，得到 $l(\gamma)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi}=c'\cdot e^{\varphi\cot\alpha}+c''$，其中 $c',c''=$ 常数，问题：求出常数 c',c'' 的值.

习 题

1. 证明：在球面 S^2 上由大圆弧组成的三角形的内角和大于 2π.
2. 在球面上，用三角形(由大圆弧组成)的面积来表示它的内角和.
3. 证明：球面上的相似变换的相似系数只可能等于 1.
4. 证明对任何黎曼度量可找到这样的坐标系，使得在此坐标系中在给定的点的黎曼度量的矩阵为单位矩阵.

1.4 伪球面和 Лобачевский 几何

欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的球面 S^{n-1} (超球面) 可定义为到坐标原点距离为 ρ 的点的集合. 在指标为 s 的伪欧空间 $\mathbf{R}_s^n$，同样可以考察到某个点距离为 ρ 的点的集合 (但现在的数 ρ 不仅可以为实数，也可以是虚数或零). 这个点的集合称为指标为 s 的伪球面，并用 S_s^{n-1} 表示. 我们将以实半径，虚半径和零半径来区分伪球面. 零半径的伪球面用二阶方程 $-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2+\sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2=0$ 表示，其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的笛卡儿坐标，在 $\mathbf{R}^n$ 上我们也制作了伪欧空间 $\mathbf{R}_s^n$ 的模型. 很明显，零半径的伪球面与迷

向(零)锥面一致.

我们考察几个特例. 设 $n=2,s=1$. 在二维平面上迷向锥面由两条直线 $x^1=\pm x^2$ 组成. 这个锥面分 $\mathbf{R}^2$ 为两部分:在其一部分中,$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_1>0$(即由不等式 $|x^2|>|x^1|$ 所定义的区域),而另一部分 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_1<0$(即由不等式 $|x^2|<|x^1|$ 所定义的区域)(图 1.22). 实半径的伪球面——这是双曲线: $-(x^1)^2+(x^2)^2=\alpha^2$,其中 α 是实数. 虚半径的伪球面——这是双曲线: $-(x^1)^2+(x^2)^2=-\alpha^2$(图 1.23).

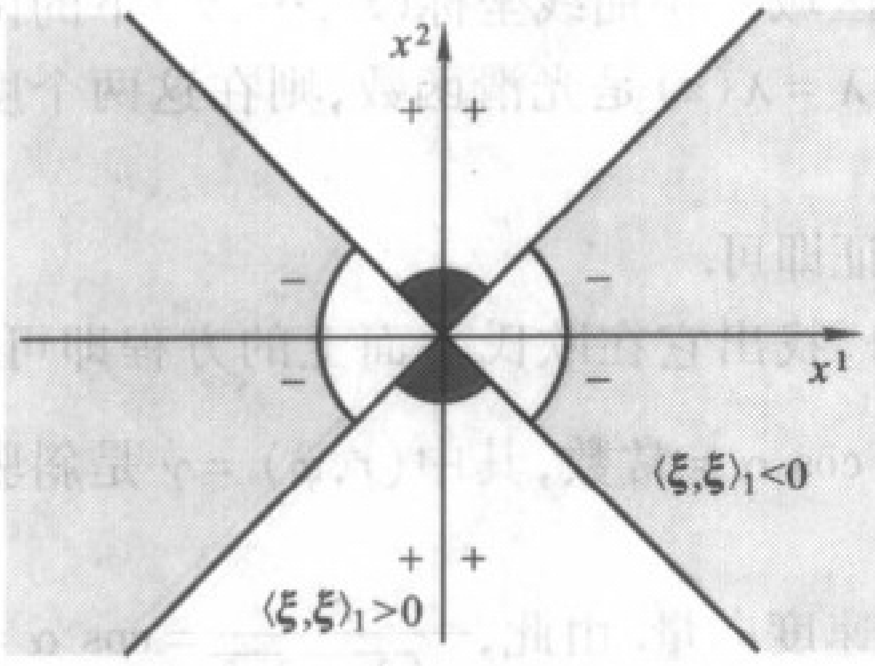


图 1.22

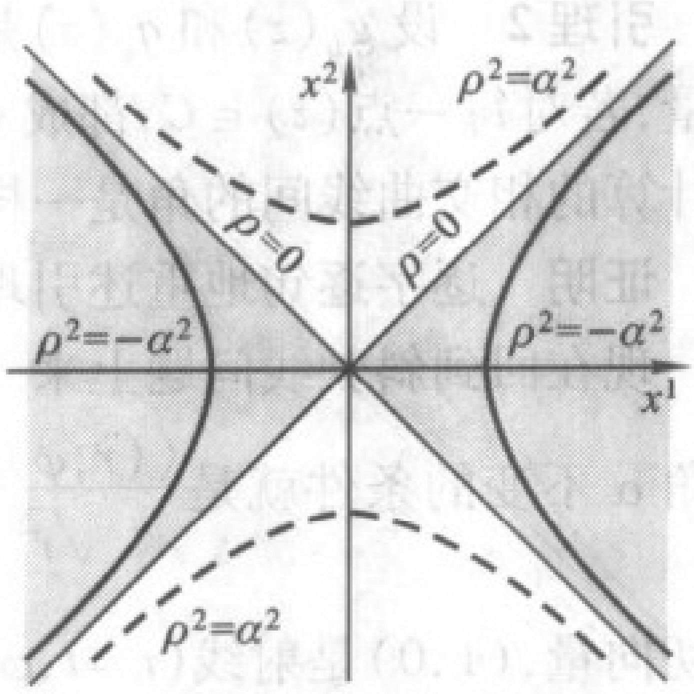


图 1.23

现在设 $n=3,s=1$. 迷向锥面(零半径的伪球面)——这是通常的二阶锥面,其方程为 $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0$,轴为 x^1 轴. 它也分整个空间为两部分(分为"内部"和"外部")(图 1.24). 实半径伪球面——这是单叶双曲面: $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=+\alpha^2$. 虚半径伪球面——这是双叶双曲面: $-(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-\alpha^2$(参看图 1.25). 为方便起见,在 $\mathbf{R}^3$ 上制作 $\mathbf{R}^3_1$ 的模型:用 x,y,z 表示 $\mathbf{R}^3$ 的笛卡儿坐标;此时 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle_1=-x^2+y^2+z^2$.

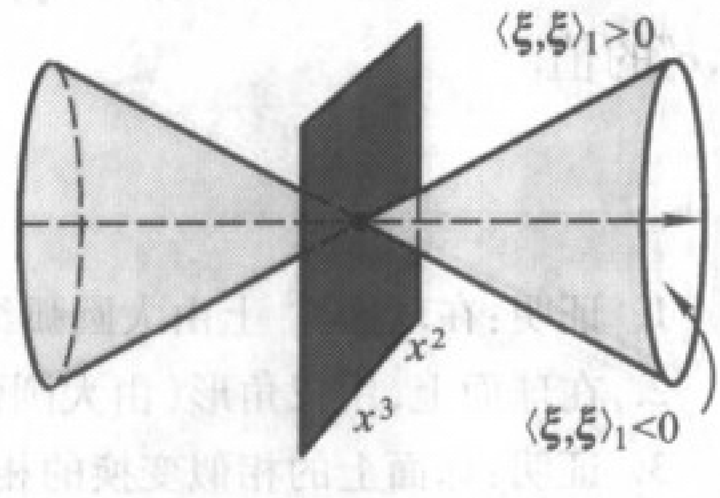


图 1.24

考察虚半径伪球面,这是双叶双曲面,其方程为 $-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$. 因为它嵌入在 $\mathbf{R}^3_1$ 中,所以可以说"空间 $\mathbf{R}^3_1$ 的几何(度量)诱导出虚半径伪球面上的某种几何(度量)". 为简单起见,仅限于研究其一叶,例如由不等式 $x>0$ 所确定的一叶;

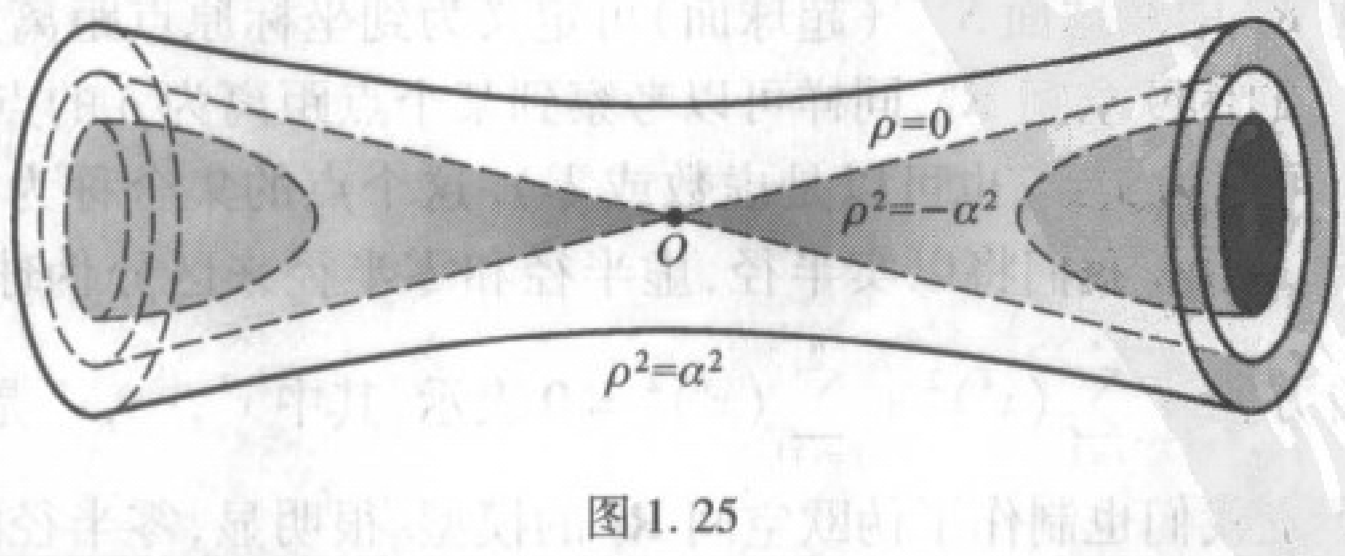


图 1.25

我们称双曲面上的通常点为伪球面的几何"点";而称双曲面与过原点的形如 $ax+by+cz=0$ 的平面相交的线为"直线"(图 1.26). 然后,作出类似于球面到平面上的球极射影的变换. 把 O 点(坐标原点)看作为伪球面 $S_1^2=\{-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2\}$ 的中心;具有笛卡儿坐标 $(-\alpha,0,0)$ 的点作为北极 N;具有笛卡儿坐标 $(\alpha,0,0)$ 的点作为南极 S;取过伪球面中心的平面 YOZ 作为在其上实现射影的平面. 顺便提一下,数量积 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle_1$ 在平面 YOZ 上的限制恰好有形式 $\xi^2\eta^2+\xi^3\eta^3$,就是说,是欧氏数量积. 现在考虑双曲面之右边部分上的变点 P,并连接 P,N,即连接点 P 与北极 N. 那么线段 $\overrightarrow{PN}$ 交平面 YOZ 于一点,用 $f(P)$ 表示,并称它为点 P 在球极射影 $f:S_1^2\to\mathbf{R}^2$ 下的像.

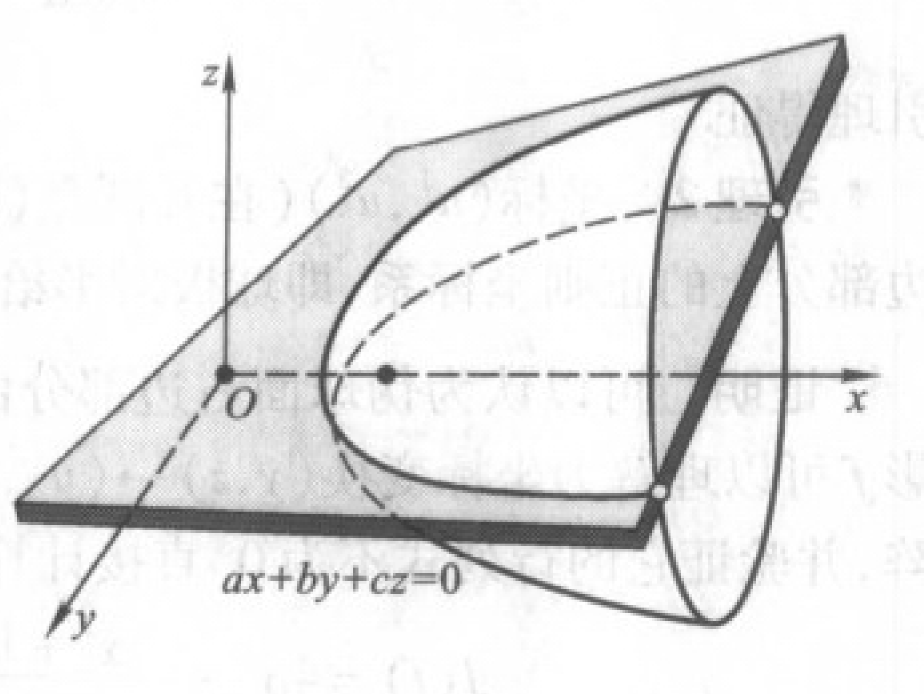


图 1.26

同样,可利用南极 S 作为射影中心,确定双曲面的左边部分在同一平面 YOZ 上的球极射影. 图 1.27 表示伪球面与过轴 OX 的平面的截线. 双曲面右边部分的像所覆盖的不是整个 YOZ 平面,而仅是半径为 α 的圆盘 $y^2+z^2<\alpha^2$ 的内部. 双曲面左边部分的像覆盖了圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 的外部. 与通常的球面 S^2 不同,伪球面 S_1^2 在其球极射影下,仅覆盖着平面 YOZ 的一部分,因为圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 不属于射影的像. 北极 N 变为平面 YOZ 的无穷远点. 现在设点 P 具有笛卡儿坐标 (x,y,z),这里 $x>0$,并设 (u^1,u^2) 是点 $f(P)$ 在平面 YOZ 上的笛卡儿坐标,这里映射 f 是球极射影. 我们来计算出球极射影的显式公式.

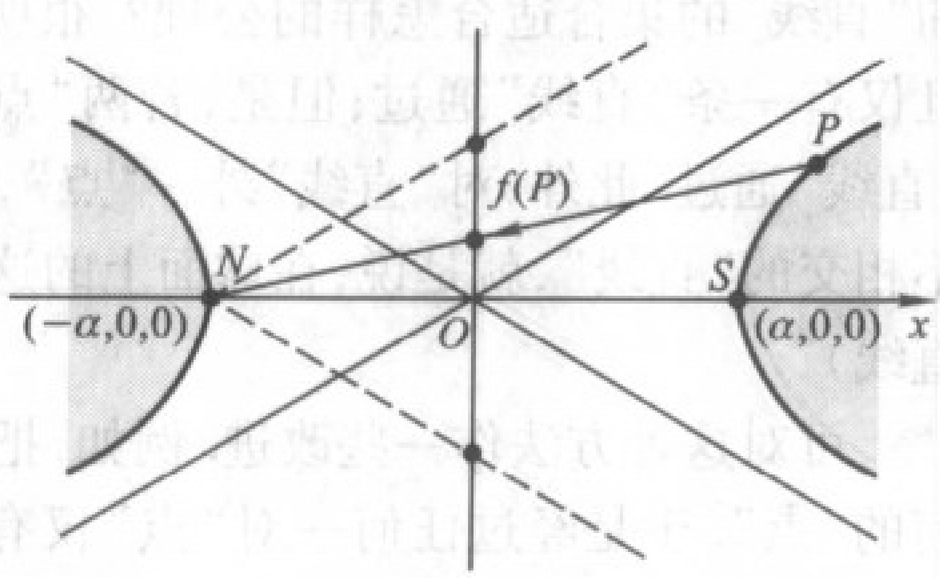


图 1.27

引理 1 设 $P=(x,y,z)$, $f(P)=(u^1,u^2)$,那么

$$x=\alpha\cdot\frac{|\boldsymbol{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2};\quad y=\frac{2\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2};\quad z=\frac{2\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2},$$

其中 $|\boldsymbol{u}|^2=(u^1)^2+(u^2)^2$; $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2)$.

证明 由图 1.27 可得

$$\frac{y}{u^1}=\frac{x+\alpha}{\alpha};\quad \frac{z}{u^2}=\frac{x+\alpha}{\alpha}.$$

因为 $-\alpha^2=-x^2+y^2+z^2$,所以

$$-\alpha^2=-x^2+((u^1)^2+(u^2)^2)\frac{(x+\alpha)^2}{\alpha^2},$$

从而

$$x = \alpha \cdot \frac{|\boldsymbol{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\boldsymbol{u}|^2}.$$

引理得证.

引理 2　坐标(u^1, u^2)(在开圆盘$(u^1)^2 + (u^2)^2 < \alpha^2$内变化)给出了双曲面右边部分上的正则坐标系,即球极射影给出了坐标的正则坐标:$f(x,y,z) \to (u^1, u^2)$.

证明　可以认为伪球面右边部分由方程$x = \sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}$所给出. 因而球极射影$f$可以理解为坐标变换$(y,z) \to (u^1, u^2)$. 剩下的就是找出这个变换的 Jacobi 矩阵,并验证它的行列式不为 0. 直接计算,得到

$$J(f) = 4\alpha^4 \cdot \frac{\alpha^2 + |\boldsymbol{u}|^2}{(\alpha^2 - |\boldsymbol{u}|^2)^3} = \frac{4\alpha^3 x}{(\alpha^2 - |\boldsymbol{u}|^2)^2} > 0.$$

于是变换的 Jacobi 行列式在圆盘$y^2 + z^2 < \alpha^2$中的所有点上是正的. 引理得证.

回到通常的球面S^2上来. 若把球面上通常的点称为"点",而球面与过中心O的平面交线(即赤道)称为"直线",将在球面上产生怎样的几何? 看看这些"点"和"直线"的集合适合怎样的公理? 很明显,经过不是对径的任何两"点",有一条且仅有一条"直线"通过;但是,若两"点"是对径的,那么过这两"点"有无穷多条"直线"通过. 此外,对"直线"外一"点",没有一条通过这"点"而与原来的"直线"不相交的"直线",就是说,在球面上的这样的几何中,不存在"平行的直线(不相交直线)".

可对这种方法作一些改进. 例如,把球面S^2上的对径点对$(P, -P)$称作新几何的"点". 于是经过任何一对"点"仅有一条"直线"通过(假定这一对"点"不重合). 这个性质已经类似于欧氏几何的相应的性质. 容易检验,在得到的几何中,除所谓的"第五公设外"所有古典的欧氏公理都满足. 这就是说,仍然是过"直线"外一"点",没有一条"直线"平行于给定的"直线",即任何两条"直线"都相交于一"点",或两条直线重合. 这个几何有时称为**椭圆几何**.

上面所述把点P与$-P$重合的运算,与按照关于O点作对称映射而将球面分为等价类的运算是等价的. 因为每一对点$(P, -P)$在三维空间(在那里嵌入球面)确定一条且仅确定一条直线,所以可以把椭圆几何的每一条"直线",即赤道,与垂直于它并经过点O的直线相对应. 于是椭圆几何是二维实射影空间的模型.

现在我们回到伪欧几何及其在虚半径伪球面上诱导出的几何上来. 考虑球极射影$f: +S_1^2 \to \{y^2 + z^2 < \alpha^2\} = D^2$. 用$+S_1^2$表示双曲面的右面部分,双曲面的点变为半径为$\alpha$的二维圆盘$D^2$的内点. 在双曲面上,我们几何中的"直线",即它与通过伪球面中心的平面的交线(类似于球面上的赤道)在圆D^2上变为怎样的曲线?

引理 3　$+S_1^2$与形如$ax + by + cz = 0$的平面的每一条交线,在映射f下变为与圆周$y^2 + z^2 = \alpha^2$交于直角的圆弧(图 1.28).

证明　由引理 1,在平面方程$ax + by + cz = 0$中代入作为变量u^1, u^2的函数的x, y, z的显式表示式就足够了. 例如假设$a \neq 0$,于是方程

$$a\alpha\frac{|\boldsymbol{u}|^2+\alpha^2}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2}+\frac{2b\alpha^2u^1}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2}+\frac{2c\alpha^2u^2}{\alpha^2-|\boldsymbol{u}|^2}=0,$$

在初等代数变换后，化为形式

$$\left(u^1+\frac{b\alpha}{a}\right)^2+\left(u^2+\frac{c\alpha}{a}\right)^2=\frac{\alpha^2}{a^2}(b^2+c^2-a^2),$$

就是说，它确定了中心点在$\left(-\frac{b\alpha}{a},-\frac{c\alpha}{a}\right)$，半径为$\frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2+c^2-a^2}=r$ 的圆，此圆与圆 $y^2+z^2=\alpha^2$ 在点 A 和 B 交成直角(图 1.29)，显然，在交点的交角等于$\frac{\pi}{2}$. 引理得证.

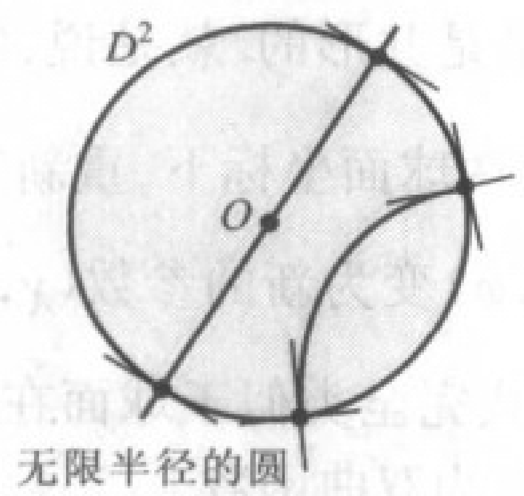


图 1.28

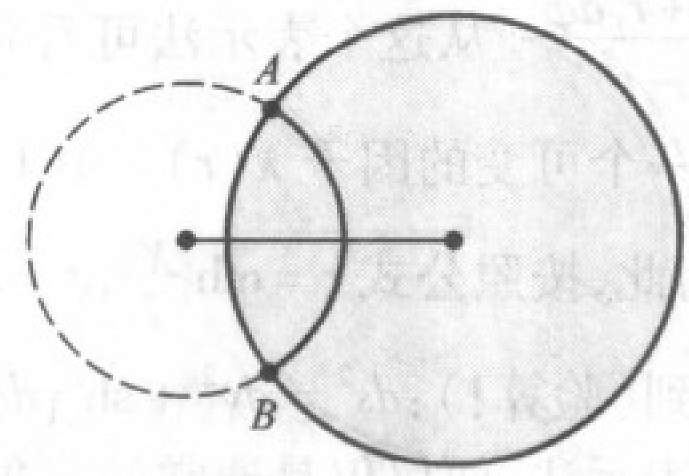
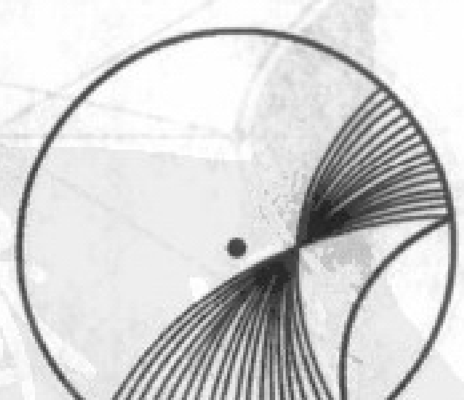


图 1.29

于是，$\mathbf{R}_1^3$ 中在虚半径伪球面上诱导的几何与发生在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上半径为 α 的圆内的几何相符合，若取这个圆内通常的点作为这个几何的“点”，而取与边界圆交成直角的圆弧作为这个几何的“直线”. 特别地，圆的所有直径都是“直线”，因为它可以看作为半径为无穷大的圆弧. 这种几何称为**双曲几何**或 **Лобачевский (Lobachevskii) 几何**，而它在欧氏平面上半径为 α 的圆内的模型称为 Лобачевский 几何的 Poincaré 模型.

在 Poincaré 模型上，容易验证除第五公设外的所有的欧几里得公理(公设)，并确信它们的正确性. 在图 1.30 中可以看出，过“直线”外的任意点，可以引无穷多条“直线”平行于给定“直线”，即与它不相交. 若参数 α 趋于无穷时，那么在 Poincaré 模型上，Лобачевский 几何对任何有限区域来讲将“趋于”欧氏几何，因为圆弧开始张直并变为欧氏直线. Poincaré 模型的边界——圆周 $y^2+z^2=\alpha^2$ 称为绝对形，在绝对形上配置的是 Лобачевский 平面的无穷远点. 有时，为简单起见，在研究 Лобачевский 平面时，假设 $\alpha=1$.


图 1.30

注　也能考察发生在 $\mathbf{R}_1^3$ 中的实半径伪球面上(即在单叶双曲面上)的几何. 证明这种几何与 Лобачевский 几何完全一样.

我们计算由外围的不定度量在虚半径伪球面上诱导的黎曼度量. 做法类似于

正常球面，在空间 $\mathbf{R}_1^3$ 中引进类似的球面坐标，在平面 YOZ 中引进极坐标(r,φ)，这里 φ 是与 y 轴的夹角. 此外再引进参数 θ' 并作变换；$y=\alpha \operatorname{sh}\theta'\cos\varphi$；$z=\alpha\operatorname{sh}\theta'\sin\varphi$；$x=\alpha\operatorname{ch}\theta'$. 在这个"伪球面"坐标系中，伪球面的方程很明显地可写为：$\alpha=$常数.

我们在 Poincaré 模型上的坐标 u^1,u^2 下，计算伪球面上的黎曼度量. 利用球极射影的公式并代入到 $\mathbf{R}_1^3$ 中弧长微分的平方表示式中，得到（验算！）

$$-(dx(u^1,u^2))^2+(dy(u^1,u^2))^2+(dz(u^1,u^2))^2$$
$$=\frac{4\alpha^4[(du^1)^2+(du^2)^2]}{[\alpha^2-(u^1)^2-(u^2)^2]^2}.$$

因而，Poincaré 模型上，在极坐标下（假设 $\alpha=1$）这个度量写为 $ds^2=4\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$. 从这个表示法可看到，所得到的度量是共形的. 就是说，它比欧氏度量多一个可变的因子 $\lambda(r)=4(1-r^2)^{-2}$. 现在在伪球面坐标下，重新写出这个度量. 为此，按照公式 $r=\operatorname{cth}\frac{\chi}{2}$，$\varphi=\varphi$ 作变换，把(r,φ)变为新的参数(χ,φ). 直接计算得到（验算！）：$ds^2=d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2$. 这个度量形式完全类似于球面在坐标$(\theta,\varphi)$下的表示法，而仅仅是通常的三角函数在这里换成为双曲函数.

我们来找出参数 χ 的几何意义. 例如，考察平面 XOZ，在此平面上产生诱导的伪欧度量 $ds^2=-dx^2+dz^2$. 伪球面与此平面交于双曲线，它在伪球面坐标下为（$\alpha=1$）：$\chi=\operatorname{ch}\theta'$，$z=\operatorname{sh}\theta'$（图 1.31）. 取角 POS 的欧氏值作为参数 θ（图 1.32）；于是很明显，$\tan\theta=\operatorname{th}\theta'$. 我们来求在伪欧度量中双曲线从 0 到 θ' 线段的长. 得到

$$l=\int_0^{\theta'}\sqrt{-\operatorname{sh}^2\theta+\operatorname{ch}^2\theta d\theta}=\theta'.$$

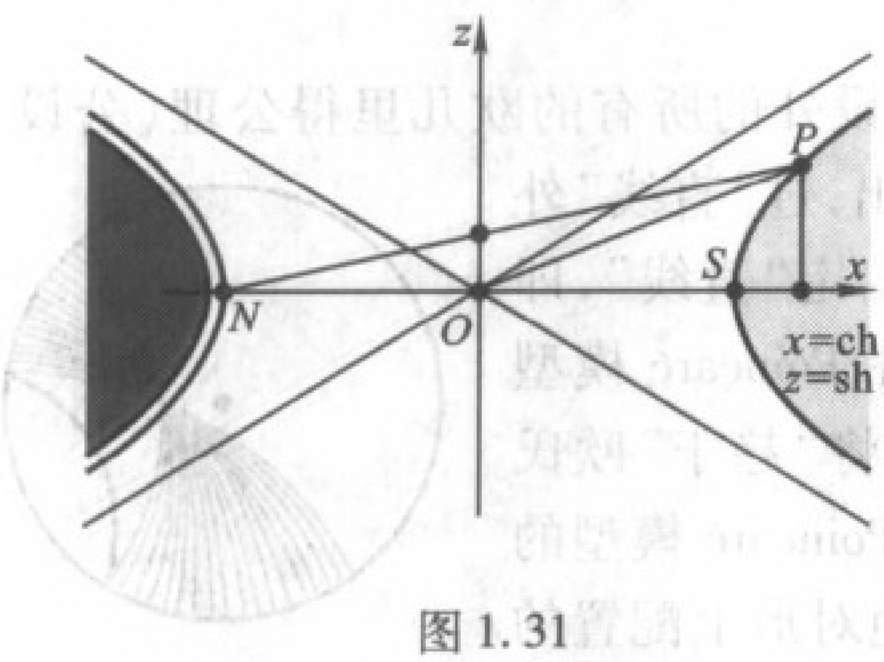


图 1.31

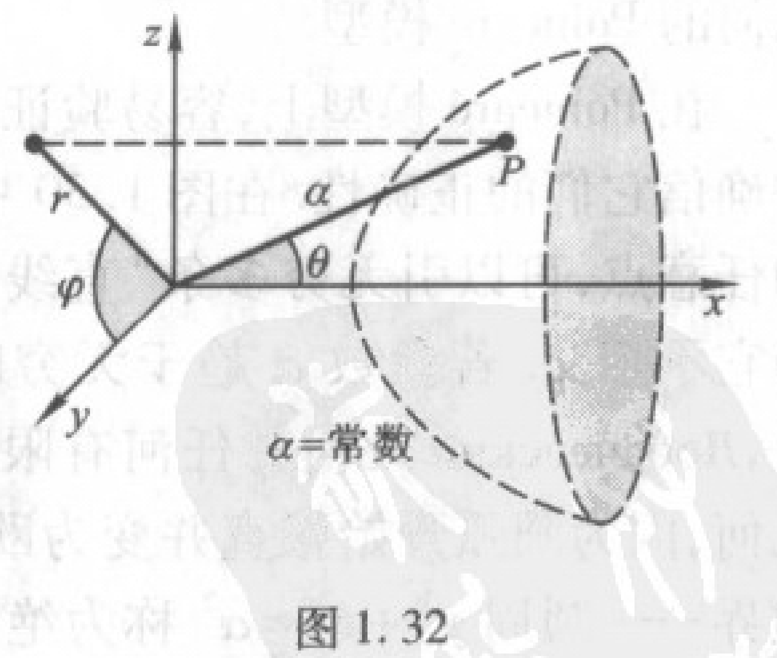


图 1.32

于是 θ' 与伪球面上从南极 S 到变点 P 的"经线"长相同，就是说，这个参数完全类似于球面上的参数 θ.

现在我们考察伪球面的球极射影. 为简单起见，仍然仅考察平面 XOZ，因为在平面 XOZ 绕 OX 轴旋转时，所有的计算都保持不变. 因为 $z=\frac{2u^2\alpha^2}{\alpha^2-r^2}$，那么得到 $z=$

$\frac{2r}{1-r^2}$(因为在平面 XOZ 上,$u^2=r$). 因为 $z=\mathrm{sh}\ \theta'\sin\varphi=\mathrm{sh}\ \theta'\left(因\ \varphi=\frac{\pi}{2}\right)$,那么 $\frac{2r}{1-r^2}=\mathrm{sh}\ \theta'$,由此 $r=\mathrm{cth}\left(\frac{\theta'}{2}\right)$. 因此就证明了 $\chi=\theta'$. 于是我们得到 Poincaré 模型上的黎曼度量 $4\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$.

我们指出,即使外围的度量是伪欧的,而这个度量却是正定的. 于是,在伪球面上诱导出正定度量的情况也可以由直观的几何设想中看出. 为简单起见,我们考虑平面 XOZ 对伪球面的截线,并设 ξ 是双曲线在点 P 的速度向量,我们希望证实其伪欧长是实的. 这可由图 1.33 推得,从图中看出,向量 ξ 位于光锥(顶点在 P 点)的外面.

上面我们所得到的黎曼度量称为 Лобачевский 度量(可以在欧氏单位圆上研究它). 前面我们已经知道了给定在单位圆上的另外的度量:欧氏度量和球面度量. 已证明了它们度量是不等价的. 现在我们证明 Лобачевский 度量也不等价于前面两个度量中的任何一个. 为此,我们使用上面用过的方法:求出 Лобачевский 平面上圆周的长并且将它表示为半径的函数(在 Лобачевский 度量中计算). 设圆周的中心为 O,并且它的欧氏半径等于 a,我们在 Лобачевский 度量中求它的长. 按曲线长的定义,得到 $\chi=2\int_0^a\frac{dr}{1-r^2}=\ln\frac{1+a}{1-a}$,即 $a=\mathrm{th}\ \frac{\chi}{2}$. 圆周长 $l=2\int_0^{2\pi}\frac{ad\varphi}{1-a^2}=\frac{4\pi a}{1-a^2}=2\pi\mathrm{sh}\chi$. 若 χ 充分小,那么可近似地认为 $l\sim 2\pi\chi$,即得到在欧氏度量下圆周长的公式. 我们用(关于坐标变换)不变量的术语,即同样用 Лобачевский 度量下计算的用半径表示圆周的长,那么上面所导出的圆周长的公式关于坐标变换是不变的,因此 Лобачевский 度量与前面两个度量中任何一个都不等价. 在图 1.34 中,导出了球面度量和伪球面度量的对照表.

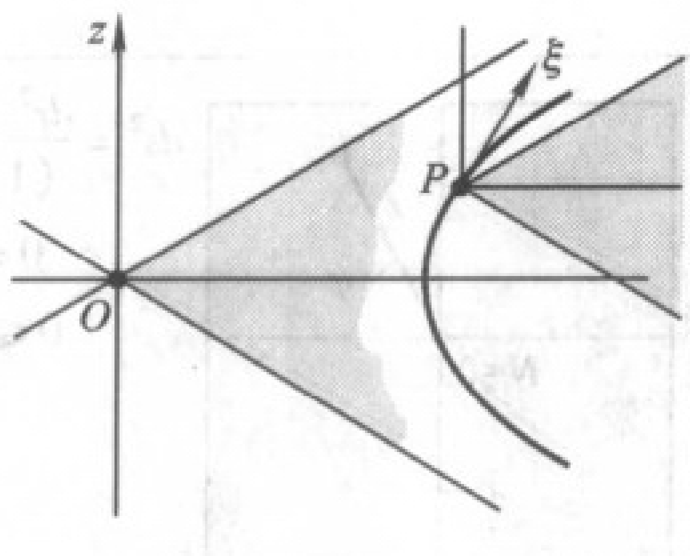


图 1.33

我们还要指出上面列举的度量的两个有用的表示形式——所谓"复数形式表示法".

我们在欧氏平面上引进"复数坐标",$z=x+iy$. 取 $x-iy$ 作为 $\bar{z}$. 把 $(x,y)\to(z,\bar{z})$ 看作为某种形式的变量变换. 这时 Jacobi 行列式 $J=2i\neq0$,所以变换是正则的. 因为 $dz=dx+idy, d\bar{z}=dx-idy$,所以在这新的坐标下欧氏度量具有形式:$ds^2=dx^2+dy^2=(dx+idy)\cdot(dx-idy)=dzd\bar{z}$. 于是球面度量具有形式

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2},$$

其中$|z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=r^2$. 完全类似地得到 Лобачевский 度量的复数形式：$ds^2=\dfrac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$.

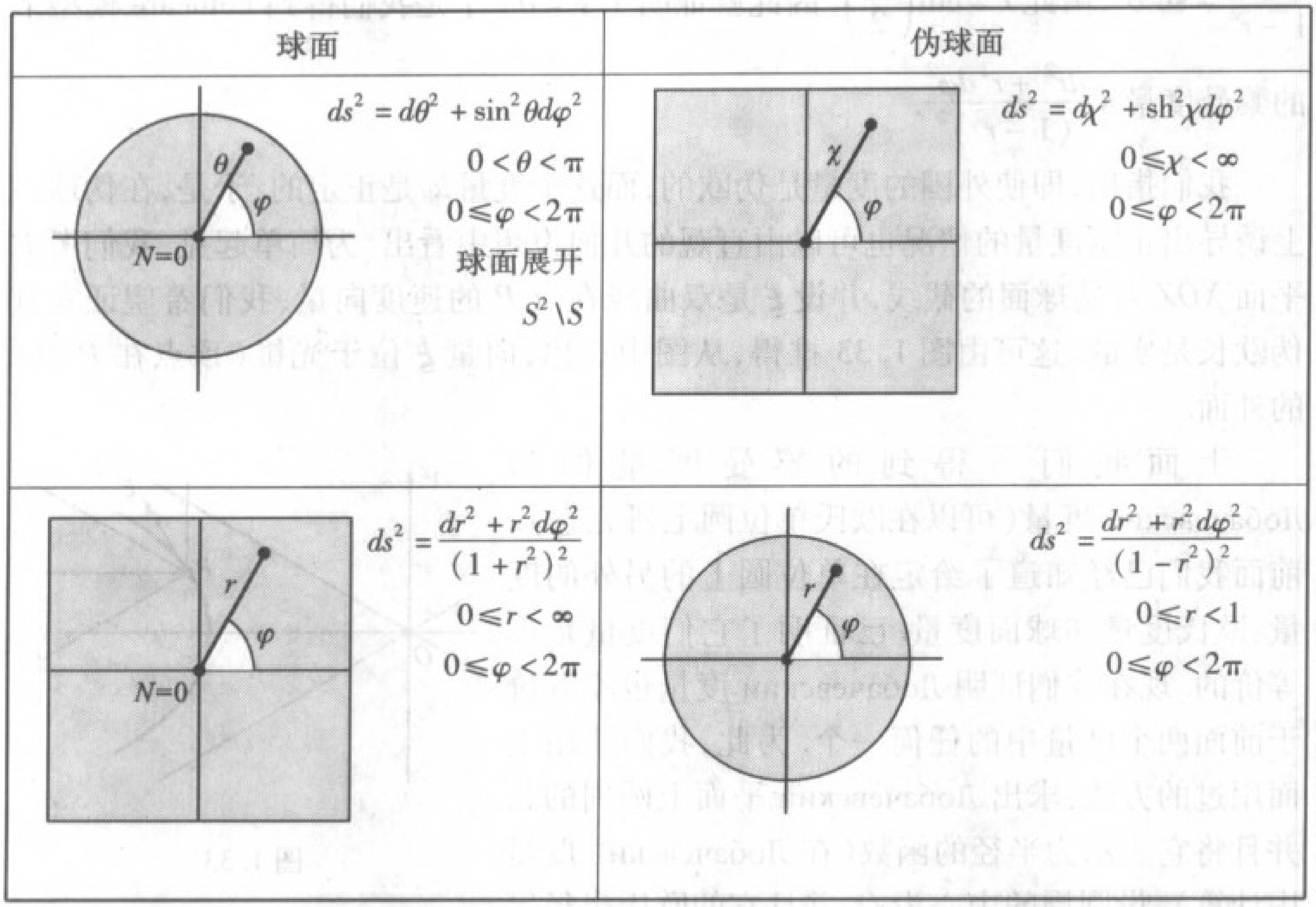


图 1.34

对于 Лобачевский 度量还存在一个在上半平面有效的表示形式. 我们再考察具有复数坐标 w 的一个平面. 在这个平面上用不等式 $\mathrm{Im}(w)>0$ 分划出上半平面，这里 $w=u+\mathrm{i}v, v=\mathrm{Im}(w)$. 考察由公式 $z=\dfrac{aw+b}{cw+d}$(a,b,c,d 是复数，且满足 $ad-bc\neq0$)给出的映射 $\mathbf{R}^2(w)\to\mathbf{R}^2(z)$. 这样的映射称为线性分式映射. 注意，若 $ad-bc=0$，则这个映射把整个平面 $\mathbf{R}^2(w)$ 变为一点(验证!).

我们的目的是找这样的映射 $z=\dfrac{aw+b}{cw+d}$，它把整个的上半平面变到平面 z 上单位圆 $|z|<1$ 的内部. 同时，实直线 $\mathrm{Im}(w)=0$ 应当变为边界圆周 $|z|=1$. 已知非退化的线性分式映射(即 $ad-bc\neq0$)由平面 w 上不共线的任何三点 W_1,W_2,W_3 的像唯一地确定. 这里我们不证明这个一般的结论. 于是，我们找出这样的映射 $z=\dfrac{aw+b}{cw+d}$，使 $0\to1,\mathrm{i}\to0,1\to\mathrm{i}$(参看图 1.35). 解所得到的关于 a,b,c,d 的方程组得到 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}w}{1-\mathrm{i}w}$(验算!). 于是得到一个把上半平面变到单位圆内的线性分式变换(这样的变换有许多!).

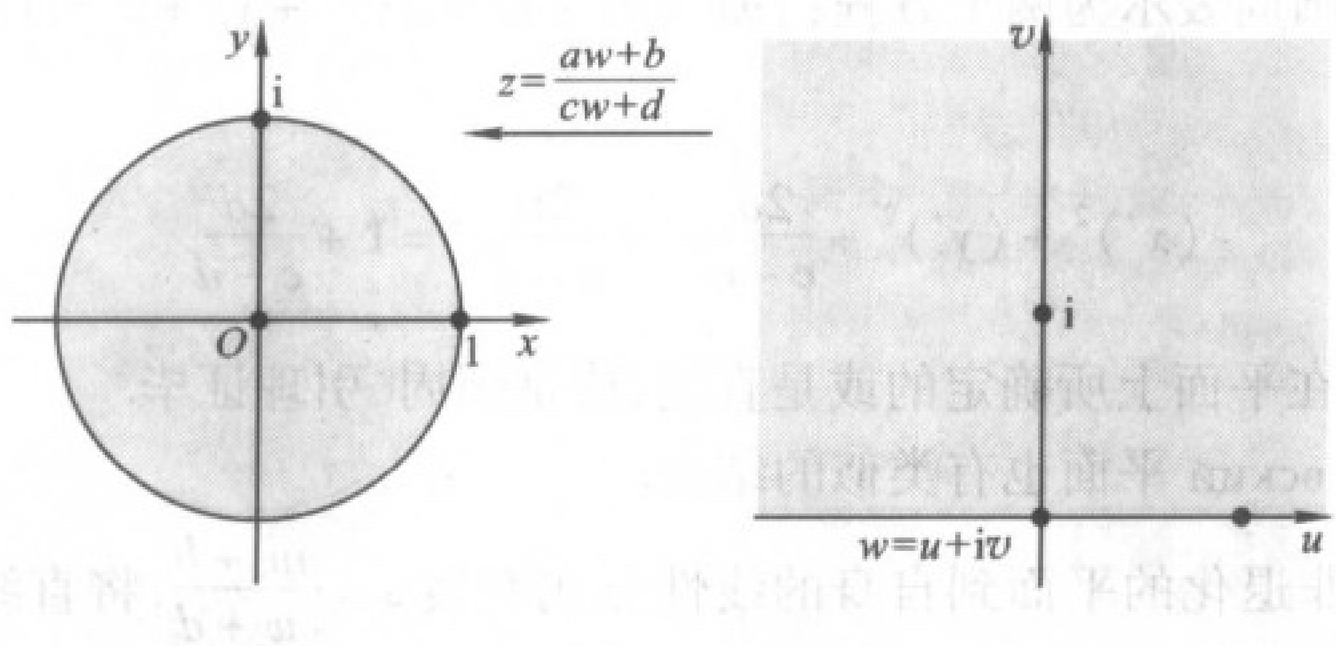


图 1.35

变换 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$是正则的. 事实上,把变换 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$表示为 $z=-1-\frac{2}{iw-1}$. 只要证明变换 $z=\frac{1}{w}$是正则坐标变换时就够了,因为所求的变换是 $z=\frac{1}{w}$平移一个常向量,旋转和伸长的复合变换. 把映射 $z=\frac{1}{w}$表示为实的形式,得到:$x=\frac{u}{u^2+v^2}$,$y=\frac{-v}{u^2+v^2}$. 由此,$J=(u^2+v^2)^2$. 结论已证得.

进一步,我们求得 $dz=\frac{2idw}{(1-iw)^2}$. 在表示式 $ds^2=\frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$中进行相应的变换,得到 $ds^2=-\frac{4dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2}=\frac{du^2+dv^2}{v^2}$. 由此再一次看出,实轴的点(Poincaré 绝对形的像)是 Лобачевский 平面上的无穷远点. 事实上,若我们想计算轴 Ov 上从点 i 到点 O 线段的长,那么得到

$$l=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\ln v\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\ln(0)\to\infty.$$

我们来说明,Лобачевский“直线”(在 Poincaré 模型中)在到上半平面的映射下变为怎样的曲线? 首先解答关于椭圆几何的类似的问题. 提醒一下,我们把球面 S^2 上所有可能的大圆看作为这个几何的“直线”. 考察 S^2 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的球极射影,找出大圆的像.

引理 4 大圆在球极射影下或者变为平面上的圆周,或者变为直线,而且当且仅当大圆经过球面的北极时才变为直线.

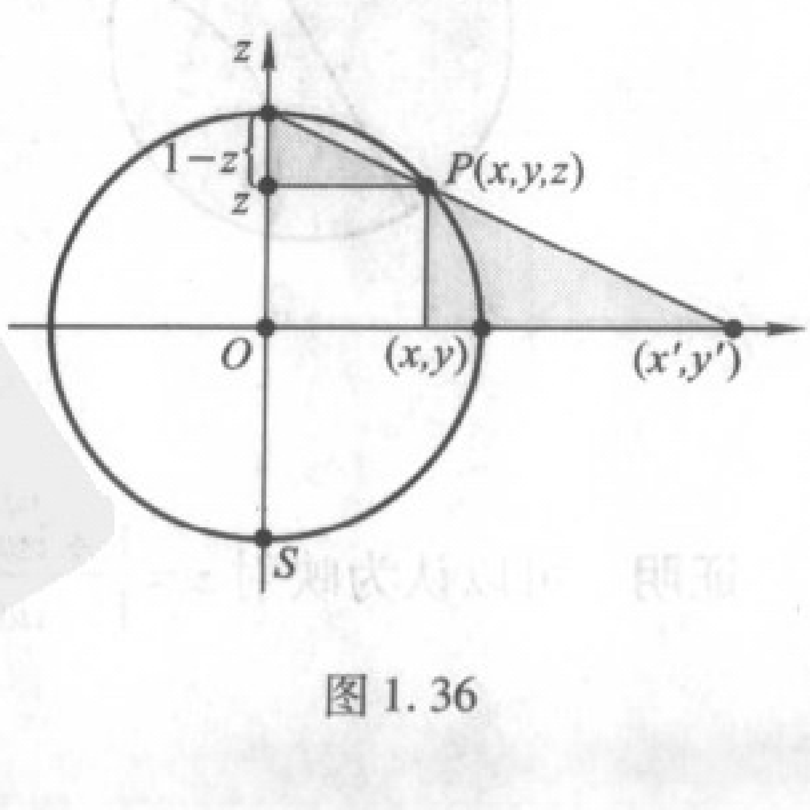


图 1.36

证明 首先,我们在笛卡儿坐标下表示出球极射影. 设 x,y,z 是球面上点 P 的坐标,而 x',y'是它在平面上的像的坐标. 于是由图 1.36 得到关系式:$x'=\frac{x}{1-z}$,$y'=\frac{y}{1-z}$. 在半径

为 1 的球面上圆周表示为两个方程：$\{ax+by+cz=d; x^2+y^2+z^2=1\}$. 直接计算，得到

$$(x')^2+(y')^2+\frac{2a}{c-d}x'+\frac{2b}{c-d}y'=1+\frac{2d}{c-d}.$$

这个二阶方程在平面上所确定的或是直线，或是圆周. 引理证毕.

对 Лобачевский 平面也有类似的结论.

引理 5 非退化的平面到自身的线性分式变换 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$，将直线和圆周仍变为直线和圆周，而且直线可能变为圆周，圆周也可能变为直线.

证明 若 $c=0$，那么结论是明显的，因为变换 $z=\frac{a}{d}w+\frac{b}{d}$ 乃是乘以一个复数和沿一个向量的平移. 设 $c\neq0$，于是 $z=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cw+d)}$，即只要对线性分式变换 $z=\frac{1}{w}$ 证明引理的结论即可. 我们考察平面 z 上任意的圆周，并写出它的方程 $|z-z_0|^2=\varepsilon^2$，即 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=\varepsilon^2$. 作变换 $z=\frac{1}{w}$，得到（变换后仍将 w 写成 z——译注），即 $z\bar{z}(\varepsilon^2-z_0\bar{z}_0)+z_0z+\bar{z}_0z-1=0$. 很明显，这方程依赖于参数 ε, z_0 的选取，确定的或是圆周，或是直线. 引理得证.

推论 1 考察把上半平面变为单位圆的映射 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$. 在此坐标变换下，Poincaré 模型的“直线”，即垂直于绝对形的圆弧，或变为 $w=u+iv$ 平面上垂直于实轴 u 的直线，或变为垂直于实轴的半圆周（参看图 1.37）.

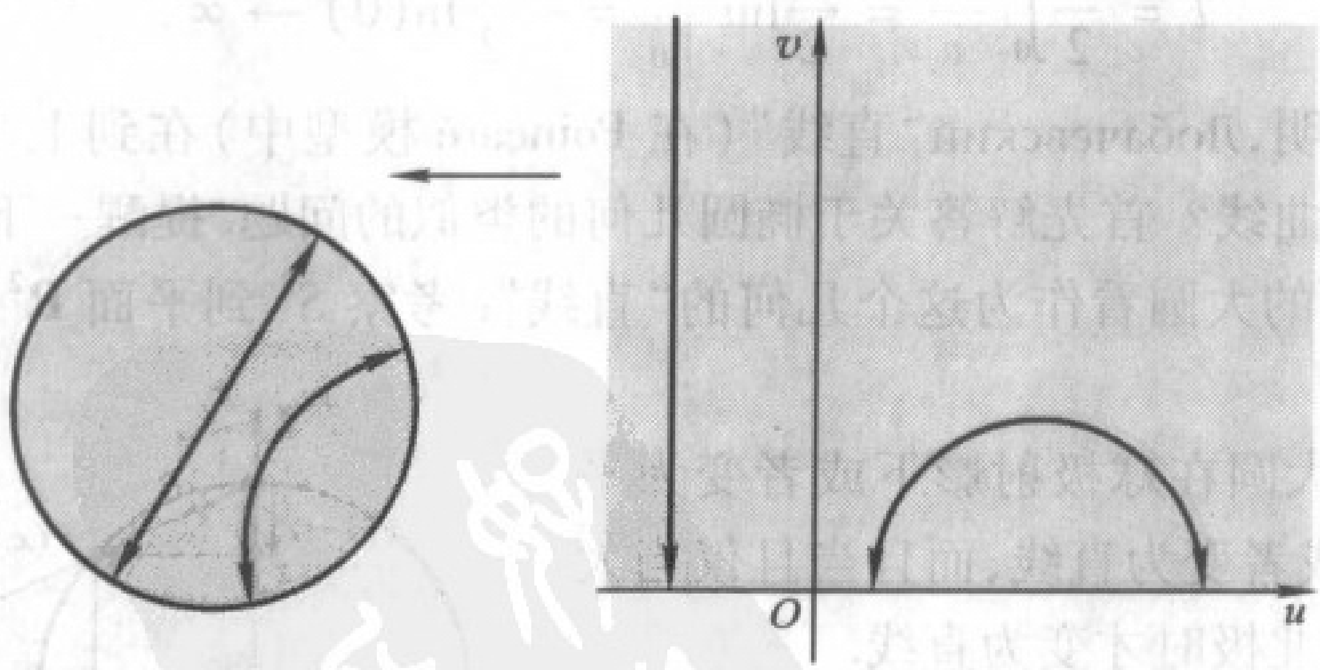


图 1.37

证明 可以认为映射 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ 在 w 平面上处处有定义. 由引理 5，这个映射把

直线或变为直线,或变为圆周. 因为变换 $z=\frac{1+\mathrm{i}w}{1-\mathrm{i}w}$ 有逆变换: $w=\frac{z-1}{\mathrm{i}(z+1)}$. 于是, Poincaré 模型的"直线"或变为 w 平面上的直线,或变为 w 平面上的圆周. 剩下的就是要证明它们应当垂直于实轴(在与实轴相交的点上). 这将由下面的引理 6 得到.

引理 6 任何映射 w 平面到 z 平面的非退化的线性分式变换 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$,使相交的光滑曲线在相交点的交角保持不变.

证明 在新坐标 $w=u+\mathrm{i}v$ 下,计算出欧氏度量 $dzd\bar{z}$,就足以证明. 直接计算指出

$$(dz)=\frac{a(dw)(cw+d)-c(dw)(aw+b)}{(cw+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cw+d)^2}(dw)①,$$

即 $(dz)(d\bar{z})=\frac{|ad-bc|^2}{|cw+d|^4}(dw)(d\bar{w})$. 于是我们的映射是共形的,即它为欧氏度量乘以一个正的因子,并且如前面已证明的,它保持光滑曲线间的交角. 引理证毕.

这样也完全证明了推论 1.

注意, Лобачевский 平面上不同的两个任意点,那么在 Лобачевский 平面中它们总可以用唯一的"直线"连接. 在图 1.38 中表明了这条"直线"的作法. 当两点所在的直线垂直于实轴时, Лобачевский 平面的"直线"与这条直线重合. 我们求出从

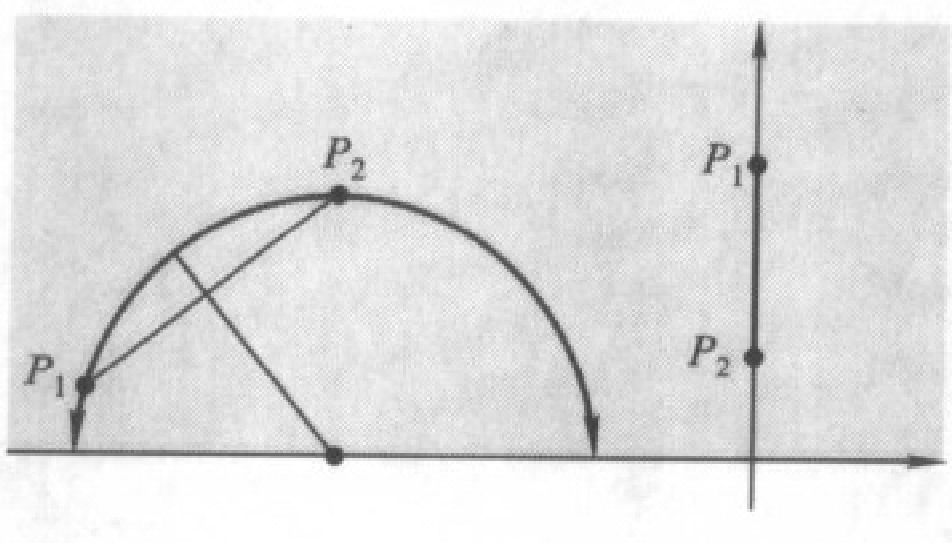


图 1.38

点 P_1 到 P_2 的"直线"段长的公式(例如,在上半平面实现的 Лобачевский 度量下). 利用水平的平移(它保持 Лобачевский 度量 $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$),可以认为过点 P_1 和 P_2 的"直线"的圆的中心位于 O 点. "直线"的方程为 $r=r_0$,这里 (r,φ) 是极坐标. 设点 P_1 和 P_2 相应地由坐标 (r_0,φ_1) 和 (r_0,φ_2) 给出. 那么从点 P_1 到 P_2 的弧长为(验算!):

① 式中加括号的"(dw)"表示微分——译注.

$$l(P_1,P_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \sin \varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = -\frac{1}{2}\ln \frac{1+t}{1-t}\Bigg|_{\cos \varphi_1}^{\cos \varphi_2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln \frac{(1+\cos \varphi_2)(1-\cos \varphi_1)}{(1-\cos \varphi_2)(1+\cos \varphi_1)} = \ln\left(\frac{\tan \frac{\varphi_2}{2}}{\tan \frac{\varphi_1}{2}}\right)^{①}.$$

① 原文为 $\ln\left(\frac{\tan \frac{\varphi_1}{2}}{\tan \frac{\varphi_2}{2}}\right)$——译注.

第二章　一般拓扑

拓扑学是数学的一个分支,它研究几何对象在“形变”或类似于形变的变换下不变的性质.

最初的拓扑问题发生在数学分析中,在那里遇到按其性质和研究方法来说是相同的许多概念.例如,收敛和极限的概念在数学分析中常以下列形式出现:(1)序列的极限,(2)一元函数的各种类型的极限,(3)多元函数的极限,(4)向量值函数的极限,(5)积分和的收敛性.所有这些极限和收敛的概念,是以共同的研究手段为基础的,直观上我们把这些方法理解为某个集合中的点的相互接近性.

不同类型的连续性概念是把收敛性概念与它们紧密地联系起来的,这是发展拓扑的另一个重要起因.

一般拓扑恰恰是研究几何的空间和它们的变换的最一般的性质的,在这里的变换正是与收敛性和连续性相联系的.

2.1　度量空间和拓扑空间的定义及最简单性质

2.1.1　度量空间

我们考察任意抽象的集合 X.一对元素 $x,y\in X$ 的非负数值函数 $\rho(x,y)$,满足下列条件时就称为集合 X 的**度量**:

1°　当且仅当 $x=y$ 时,$\rho(x,y)=0$(恒等公理);

2°　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$(对称公理);

3°　对任何三个元素 $x,y,z\in X$,总成立

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\text{（三角不等式）}.$$

集合 X 与定义在 X 上的某个度量 ρ 一起称为**度量空间**，集合 X 的元素称为点. 对一对点 $x,y\in X$ 上的度量值 $\rho(x,y)$ 称为点 x 和 y 之间的距离.

实数集合 $\mathbf{R}^1$ 是度量空间的例子，其度量由等式 $\rho(x,y)=|x-y|$ 给出. 类似地，n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，具有度量 $\rho(x,y)=\sqrt{(x-y)(x+y)}$，$x,y\in\mathbf{R}^n$，也是度量空间.

如果 X 是具有度量 ρ 的度量空间，而 Y 是 X 的某个子集，那么借助于同一个度量 ρ 在子集合 Y 上的限制，集合 Y 也成为度量空间. 度量空间 Y 称为度量空间 X 的**子空间**.

对 $x\in X$，满足 $\rho(x,y)<\varepsilon$ 的所有点 $y\in X$ 的集合 $O_\varepsilon(x)$ 称为**中心在 $x\in X$，半径为 ε 的球邻域**.

当 x 跑遍集合 Y_1，而 y 跑遍集合 Y_2 时，数 $\rho(x,y)$ 的下确界称为**两个集合 Y_1，$Y_2\subset X$ 之间的距离**，记为 $\rho(Y_1,Y_2)$. 若 Y_1 和 Y_2 具有公共点，那么 $\rho(Y_1,Y_2)=0$.

对集合 $Y\subset X$，满足 $\rho(x,Y)<\varepsilon$ 的所有点 $x\in X$ 的集合 $O_\varepsilon(Y)$ 称为**半径为 ε 的集合 Y 的球邻域**.

使 $\rho(x,Y)=0(Y\subset X)$ 的每一个点 $x\in X$ 都称为集合 Y 的**接触点**.

集合 Y 的所有接触点的集合称为集合 Y 的**闭包**，集合 Y 的闭包用 $\overline{Y}$ 表示.

度量空间的子集 $Y\subset X$，若它的闭包 $\overline{Y}$ 与 Y 相同，$\overline{Y}=Y$，则称 Y 是**闭集**.

X 的子集 Y，若 Y 的补（余集）$X\backslash Y$ 是闭集，则称 Y 是开集.

设 X 是度量空间. 则：任何一族开集的并是开集；有限多个开集的交是开集；任何一族闭集的交与有限个闭集的并是闭集.

在前面的论证中，我们还未用到通常称为三角形不等式的度量性质 3°. 我们还要表述建立在三角形不等式基础上的度量空间的几个结论.

1° 球邻域 $O_\varepsilon(x)$ 是开集；

2° 任何集 Y 的内部 Int Y 是开集；

3° 任何集 Y 的闭包 $\overline{Y}$ 是闭集.

在度量空间的许多论证中，仅用到上面所叙述的性质. 所以，可以扩大空间的种类，对这些空间，凡涉及到开集，闭集，内点和接触点都有意义.

2.1.2 拓扑空间

集合 X 中，若引入一族称为开集的子集，而且满足下面的条件：

1° 集合 X 与空集都是开集；

2° 任何一族开集的并与有限个开集的交都是开集，

我们就说在集合 X 上给出了**拓扑**.

集合 X 和在它上面给出的拓扑称为**拓扑空间**，集合 X 的元素称为空间 X 的点. 开集的补（余集）称为闭集. 显然，在任何拓扑空间 X 中，成立闭集的对偶性质：

(1°)′ 集合 X 与空集是闭集.

(2°)′ 任何一族闭集的交与有限个闭集的并都是闭集.

度量空间 X 上的一族开集给出了 X 上某个拓扑,即把 X 变为拓扑空间.

在拓扑空间中,再现了度量空间的很多概念. 我们称任何含有点 x 的开集为拓扑空间 X 中**点 x 的邻域**. 包含子集 Y 的开集称为**集合 Y 的邻域**. 若点 x 的每一个邻域与集合 $Y\subset X$ 都有非空的交,则称 x 是集合 Y 的**接触点**. 集合 Y 的所有接触点的集合称为集合 Y 的**闭包**,并用 $\overline{Y}$ 表示. 点 $x\in Y$ 与它的某个邻域都在 Y 中,则称 x 是集合 Y 的**内点**. 集合 Y 的所有内点的集合称为集合 Y 的**内部**,并用 $\mathrm{Int}\ Y$ 表示.

集合 $Y\subset X$ 是闭集(即为开集的补(余集))的充要条件是 $Y=\overline{Y}$.

拓扑空间 X 的任何集 Y 的闭包 $\overline{Y}$ 是闭集,即 $\overline{\overline{Y}}=\overline{Y}$.

例 1 考察由一个元素 x 组成的集合 X. 在 X 上可以引入唯一的拓扑结构,它的开集是集合 X 和空集.

例 2 考察由两个元素 $x\neq y$ 组成的集合 X. 在这个集合上甚至能引进几个不同的拓扑结构. 第一个拓扑结构由所有的子集的集合 $\{\varnothing,\{x\},\{y\},X\}$ 作为开集给出. 第二个拓扑结构由开集族 $\{\varnothing,X\}$ 给出. 最后,还可以给出第三个拓扑结构,取 $\{\varnothing,\{x\},X\}$ 作为它的开集族. 这是在同一个集合 X 上列举的完全不同的拓扑结构,它给出了三个不同的拓扑空间.

例 3 设 X 是任何集合. 在 X 上引入拓扑结构,取它的任何子集作为开集. 那么任何单个点的子集都是开集,也就是说,作为它自己的点的并的任一子集也是开集. 这样的拓扑称为**离散拓扑**.

设 X 是拓扑空间,$Y\subset X$ 是它的子集. 那么,在 Y 上也能作出拓扑结构,方法是取所有的集合 $Y\cap U$ 为开集,其中 U 是 X 中的开集. 此时,拓扑空间 Y 称为拓扑空间 X 的**子空间**,而 Y 中的拓扑结构称为**诱导拓扑**. 若 X 是度量空间,而 Y 是它的子空间,那么 Y 的拓扑结构的给出与下面的做法次序无关:度量先在 Y 上作限制,再转化为拓扑,或先转化为拓扑,再诱导出 Y 上的拓扑.

设 Y 是拓扑空间 X 中的子集. 若 $\overline{Y}=X$,则称 Y 为**稠密集(处处稠密)**.

定理 1 若 Y_1,Y_2 是空间 X 的两个稠密的开集,那么它们的交 $Y=Y_1\cap Y_2$ 是开集并且在 X 中是稠密的.

证明 设 $x\in X$ 是任意点,U 是它的邻域. 因为集合 Y_1 是稠密的,所以 $U\cap Y_1\neq\varnothing$,即存在点 $y\in U\cap Y_1$. 因为 $U\cap Y_1$ 是开集,而 Y_2 是稠密集,所以 $U\cap Y_1\cap Y_2\neq\varnothing$,即 $U\cap Y\neq\varnothing$,这就是说 Y 是 X 中的稠密集. 定理证毕.

2.1.3 连续映射

拓扑空间的概念可以如此方便地建立,使得连续映射的定义可从数学分析中逐字逐句地转移过来.

定义 1(Cauchy) $f:X\to Y$ 为拓扑空间的映射,若对点 $f(x_0)\in Y$ 的任何邻域

$V(f(x_0))$，存在点 $x_0 \in X$ 的这样的邻域 $U(x_0)$ 使 $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$，则称 f **在点 $x_0 \in X$ 连续**. 若映射 f 在空间 X 的每一点都连续，则称 f 为**连续映射**.

定理 2 映射 $f:X\to Y$ 连续的充分必要条件是满足下面两个等价条件之一：

1° 任何开集的原像是开集.

2° 任何闭集的原像是闭集.

证明 因为对原像来说，关系式 $f^{-1}(Y\backslash A) = X\backslash f^{-1}(A)$ 成立，所以条件 1°和 2°等价. 设 f 是连续映射，$V\subset Y$ 是开集. 我们证明它的原像 $f^{-1}(V)$ 是开集. 假定 $x \in f^{-1}(V)$，则 $f(x) \in V$，即 V 是点 $f(x)$ 的邻域. 于是按照连续映射 f 的定义，存在这样的点 x 的邻域 U，使 $f(U) \subset V$，即 $U \subset f^{-1}(V)$，这就是说集合 $f^{-1}(V)$ 是开集.

反过来，假设条件 1°是满足的. 若 $V \ni f(x_0)$ 是点 $f(x_0)$ 的邻域，则 $U = f^{-1}(V) \ni x_0$ 是点 x_0 的邻域，而且 $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V \subset V$. 于是 f 是连续映射. 定理证毕.

定理 2 的条件 1°和 2°在验证拓扑空间的连续映射时是方便的. 例如：若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 是拓扑空间的连续映射，则复合映射 $gf:X\to Z$ 也是连续的.

设拓扑空间 X 表示为自己的两个闭子集的并 $X = F_1 \cup F_2$，$f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 映射 f 连续的充要条件是 f 在子集 F_1 和 F_2 上的限制 $f|F_1:F_1\to Y$，$f|F_2:F_2\to Y$ 是连续的.

我们考察拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射 $f:X\to Y$. 若 f 是双方单值的，而逆映射 f^{-1} 也是连续的，则映射 f 称为**同胚**. 同时，拓扑空间 X 和 Y 称为**同胚的拓扑空间**. 在同胚下，不仅建立了拓扑空间 X 和 Y 的点之间的双方单值的对应，而且建立了拓扑结构本身之间一对一的对应. 就是说，建立了开集族之间的对应和建立了闭集族之间的对应.

例 4 连续函数，即拓扑空间 X 到实数空间 $\mathbf{R}^1$ 的连续映射，是连续映射的重要的特殊情形. f 是连续函数的条件可以用如下的方式叙述：对任何点 $x_0 \in X$ 和任何 $\varepsilon > 0$，存在点 x_0 的邻域 U，使得当 $y \in U$ 时，不等式 $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ 成立. 对拓扑空间上的函数，可以定义连续函数序列的均匀极限.

如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得对 $n > N$，对所有的 $x \in X$，不等式 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立，则函数 f 称为连续函数序列 $\{f_n\}$ 的均匀极限.

像一元实变函数的情形一样，下面的结论是正确的：

若 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$，并且在拓扑空间 X 上的连续函数序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f 是均匀的，则函数 f 也是连续的.

例 5 设 $f:X\to Y$ 是度量空间的连续映射，ρ_1，ρ_2 分别为空间 X，Y 上的度量. 那么映射 f 连续性的条件可用下面方式叙述：对任何 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在这样的 $\delta > 0$，从不等式 $\rho_1(x, x_0) < \delta$ 可得到不等式 $\rho_2(f(x), f(x_0)) < 0$.

把数列收敛性概念推广到度量空间也是有效的. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$，则说点列

$\{x_n\}$ 收敛于点 x_0，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 空间和映射的许多性质可用度量空间的收敛序列的语言来叙述. 举例说，若对任何收敛点列 $\{x_n\}\subset Y$，其极限 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 也属于集合 Y，则集合 $Y\subset X$ 是闭集. 还有，度量空间映射 $f:X\to Y$ 的连续性条件 Heine 叙述为：

定义 2(Heine) 若由等式 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可得到等式 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ 时，则称**映射 f 在点 x_0 连续**.

例 6 考察两个拓扑空间 X 和 Y，构造新的拓扑空间 $X\times Y$. 集合 $X\times Y$ 是所有形为 (x,y) 的配对的集合，其中 $x\in X, y\in Y$，称 $X\times Y$ 为集合 X 和 Y 的**笛卡儿乘积**. 现在来定义 $X\times Y$ 中的拓扑. 若 $U\subset X\times Y$ 表示为并 $U=\bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha\times W_\alpha)$，其中 $V_\alpha\subset X$，$W_\alpha\subset Y$ 是开集，则称集合 U 为开集. 验证开集的性质是容易的. 集合 $X\times Y$ 和上面所定义的拓扑结构一起称为**拓扑空间 X 和 Y 的笛卡儿乘积**. 同时，拓扑空间 X 和 Y 称为笛卡儿乘积 $X\times Y$ 的**因子**.

设 Z，X_1 和 X_2 是拓扑空间. 对任何两个映射：$f_1:Z\to X_1$ 和 $f_2:Z\to X_2$，映射 $F:Z\to X_1\times X_2$，$F(z)=(f_1(z),f_2(z))$ 是连续的充要条件是 f_1 和 f_2 是连续的.

例 7 设 X 和 Y 是度量空间，则笛卡儿乘积 $X\times Y$ 容有与笛卡儿乘积的拓扑相一致的度量. 设 ρ_1,ρ_2 分别是空间 X 和 Y 的度量. 在笛卡儿乘积 $X\times Y$ 上定义度量 ρ，

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\}. \tag{2.1}$$

另外的在笛卡儿乘积上给出度量的方法，是将笛卡儿乘积的因子 X 与 Y 与平面坐标轴进行类比. 度量按照下面公式给出

$$\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1,x_2)^2+\rho_2(y_1,y_2)^2}. \tag{2.2}$$

为了证明度量(2.2)给出的拓扑与度量(2.1)给出的拓扑一致，只要找到两个常数 $C_1>0$ 和 $C_2>0$，使

$$\begin{aligned}&C_1\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))\leqslant\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))\\&\leqslant C_2\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))\end{aligned}$$

成立就可以了.

2.1.4 商拓扑

设 X 为拓扑空间，Y 为某个集合，$f:X\to Y$ 为 X 到 Y 上的映射. 若 f 满足：对 Y 的子集 U，当且仅当 $f^{-1}(U)$ 作为 X 的子空间是开集时，U 为 Y 的开集. 则映射 f 给出了集合 Y 上的商拓扑.

例 8 设 X 是闭区间 $[0,2\pi]$，Y 是单位圆周 $x^2+y^2=1$. 定义映射 $f:X\to Y$，$f(t)=(\cos t,\sin t)$. 此时，由 $\mathbf{R}^2$ 诱导的圆周上的拓扑与由映射 f 给出的商拓扑一致.

例 9 设 R 是拓扑空间 X 上的等价关系，X/R 是所有等价类的集合，并且 $f:X\to X/R$ 是将 X 中每一点对应于它的等价类的自然映射. 那么，在 X/R 上就引入了由此映射给出的商拓扑. 这样的拓扑空间 X/R 称为空间 X 按照模 R 的商空间. 例

如,设 $X=\mathbf{R}$ 是实直线,R 是等价关系:"$x\equiv y \bmod R$(当且仅当 $x-y$ 是整数)"此时商空间与圆周同胚.

例 10　设 X 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正方形 $ABCD$. 那么,X 是具有由 $\mathbf{R}^2$ 诱导的拓扑的拓扑空间. 我们引入下面等价关系 R_i:

R_1——线段 AB 和 DC 上与平行于 AD 的直线的交点视为同一点;

R_2——线段 AB 和 CD 上,与过正方形中心的直线的交点视为同一点;

R_3——线段 AB 和 DC 上的点按关系 R_1 视为同一点,而线段 BC 和 AB 上与平行于 AB 的直线的交点视为同一点;

R_4——线段 AB 和 CD 上的点按关系 R_2 视为同一点,而线段 BC 和 AD 上与平行于 AB 的直线的交点视为同一点;

R_5——线段 AB 和 CD 上的点按关系 R_2 视为同一点,而 BC 和 DA 上与交于正方形中心的同一直线的交点视为同一点.

那么,X/R_1 是环,X/R_2 是 Möbius 带,X/R_3 是二维环面,X/R_4 是 Klein 瓶,X/R_5 是射影平面.

习　　题

1. 举出有限集合上的度量的例子,要求此度量不是从它在欧氏空间的任何嵌入中诱导出来的.
2. 证明:直线上的有限集是闭集.
3. 证明:$\rho(x,Y)=\rho(x,\overline{Y})$.
4. 证明:函数 $f(x)=\rho(x,Y)$ 对任何子集 Y 是连续的.
5. 证明:有限集合上的任何度量在它上面诱导出离散拓扑.
6. 证明:区间、半区间、实直线上的线段两两不同胚.
7. 证明:在度量空间 X 的笛卡儿平方 $X\times X$ 上,度量 $\rho(x,y)$ 是连续函数.
8. 证明:集合 X 表示为两个闭集之差的充要条件为 $(\overline{X}\backslash X)$ 是闭集.
9. 证明:在连续映射下,稠密子集的像在像集中是稠密的.

2.2　连通性　分离公理

2.2.1　连通性

考察拓扑空间 X 中两点 $x,y\in X$,和单位区间的连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$,其中 $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$. 那么,称 γ 是连接点 x 和 y 的曲线. 如果拓扑空间 X 中的任何两点都可用曲线连接,则称拓扑空间 X 是道路连通的. 这时,空间不能分为两个非空的既开又闭不相交的集合的并. 这个事实可由单位区间就具有这个性质得到. 事实上,如果区间 $[a,b]$ 是两个非空既开又闭不相交集的并,即

$$[a,b]=A\cup B.$$

不失一般性，假设 $a\in A$. 那么由于 A 是开集，存在这样的 $\varepsilon>0$，使半开区间 $[a,a+\varepsilon)\subset A$，对满足 $[a,a+\varepsilon)\subset A$ 的所有 ε，取 $\varepsilon_0=\sup\{\varepsilon\}$. 那么对任何 $\varepsilon<\varepsilon_0$，有 $[a,a+\varepsilon+(\varepsilon_0-\varepsilon)/2]\subset A$，即 $a+\varepsilon\in A$. 由于 A 是闭集，于是 $a+\varepsilon_0\in A$. 因为 A 同时为开集，因此 ε_0 与某一邻域包含于 A 中. 对 ε_0 来说，唯一的可能性仅是等式 $a+\varepsilon_0=b$ 成立. 否则 ε_0 就不等于 $\sup\{\varepsilon\}$. 于是，$[a,b]=A$，即 $B=\varnothing$，这与假设矛盾.

一般，拓扑空间 X，如果不能分解为两个非空既开又闭的子集时，则称 X 是**连通的**.

定理 1 设 $X=\bigcup_\alpha X_\alpha$，每一个 X_α 是连通的，并且交集 $\bigcap_\alpha X_\alpha$ 不空，则空间 X 是连通的.

证明 假定相反的情况成立，即 $X=A\cup B, A\cap B=\varnothing$，集合 A 和 B 是非空开集. 那么有 $X_\alpha=(X_\alpha\cap A)\cup(X_\alpha\cap B)$，这里 $X_\alpha\cap A$ 和 $X_\alpha\cap B$ 在 X_α 中是开集. 但因集合 X_α 是连通的，所以或者 $X_\alpha\cap A=\varnothing$，或者 $X_\alpha\cap B=\varnothing$. 就是说每一个集合 X_α 或者整个在 A 中，或者整个在 B 中. 其次，因为集合 A 和 B 不是空集，于是有点 $a\in A, b\in B$. 设 $a\in X_{\alpha_0}$，那么有 $X_{\alpha_0}\subset A$. 设 $b\in X_{\alpha_1}$，那么有 $X_{\alpha_1}\subset B$. 就有 $X_{\alpha_0}\cap X_{\alpha_1}=\varnothing$，这与定理的条件相矛盾. 定理证毕.

定理 2 在连续映射下，连通空间的像是连通的.

证明 设 $f:X\to Y=f(X)$ 是连续映射. 所以，若 Y 不是连通空间，则 $Y=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，A,B 是开集且不是空集. 于是 $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，集合 $f^{-1}(A)$，$f^{-1}(B)$ 是非空开集，而且是不相交的. 定理证毕.

例 1 由定理 2 得到，所有定义在实直线的闭区间 $[a,b]$ 上的连续实函数 $y=f(x)$，可以取到中间的值. 若某个中间的值 y_0 不被函数 f 取到，那么像集 $f([a,b])$ 就分为两个非空开集的并，一个集合中的点小于 y_0，而另一个集合中的点大于 y_0，这与定理 2 相矛盾.

存在连通拓扑空间，但不是道路连通的例子.

例 2 设 X 是函数 $y=f(x)=\sin(1/x)$ 图形的闭包，它是二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 中的集合(图 2.1). $\mathbf{R}^2$ 的度量取经典的度量，即在 $\mathbf{R}^2$ 中连接点对的线段的长度. 那么，集合 X 由函数 $y=\sin(1/x)$ 的图形和铅垂线段 $\Gamma_3=\{(x,y):x=0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$ 的并组成. 函数 f 的图形分成两个子集，每一个子集都同胚于一个区间：$\Gamma_1=\{(x,y):0<x<\infty, y=f(x)\}$，$\Gamma_2=\{(x,y):-\infty<x<0, y=f(x)\}$. 所以，若 $X=A\cup B, A\cap B=\varnothing$，$A,B$ 是非空开集，那么子集 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 中每一个都全部在 A 中，或全部在 B 中. 设

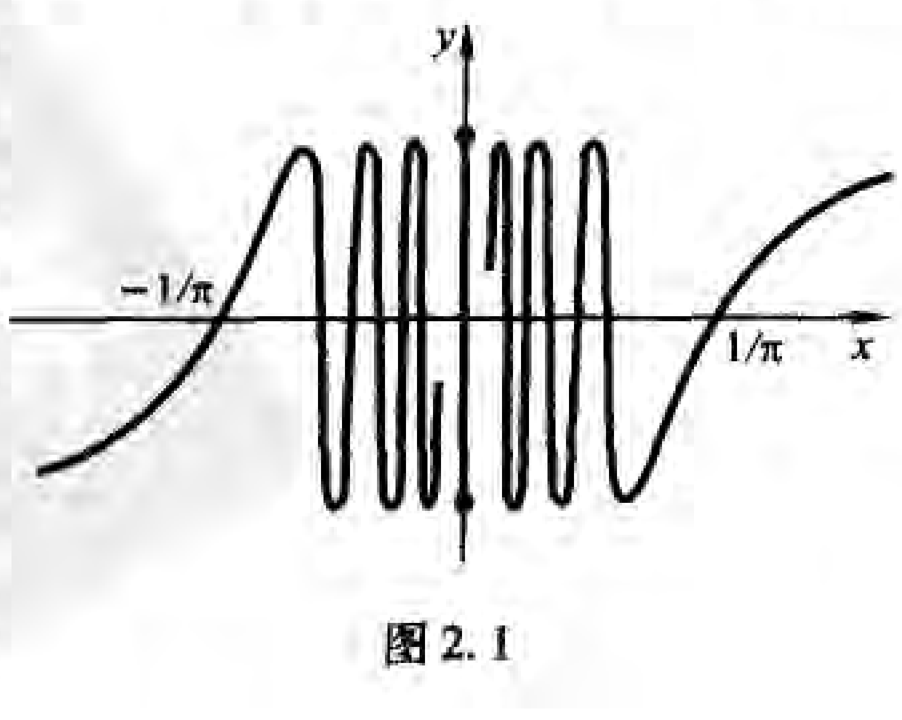


图 2.1

$\Gamma_3 \subset B$. 容易证明 Γ_3 的任何邻域既与 Γ_1 相交, 也与 Γ_2 相交, 就是说, $\Gamma_1 \subset B, \Gamma_3 \subset B$. 即 $A = \varnothing$,这与假设矛盾. 于是,X 是连通空间.

现在证明,X 不是道路连通的. 考察 X 中两点:$P = (-1/\pi, 0)$ 和 $Q = (1/\pi, 0)$. 假设存在连续映射 $f:[0,1] \to X, f(0) = P, f(1) = Q$. 映射 f 由两个连续的数值函数给出:$f(t) = (x(t), y(t))$,在 $x(t) \neq 0$ 时,$y(t) = \sin(1/x(t))$. 因为 $x(0) = -1/\pi$,所以对满足 $x(t) = 0$ 的那些 t 的下确界 t_0 严格地大于 0,$t_0 > 0$. 于是,在区间$[0, t_0)$上满足条件:$x(t) < 0, y(t) = \sin(1/x(t))$. 因 $x(t)$ 是连续函数,并且存在序列 $t_k \geqslant t_0, t_k \to t_0$,这里 $x(t_k) = 0$,那么 $x(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = 0$. 但此时当 $t \to t_0 - 0$ 时,函数 $\sin(1/x(t))$的极限不存在,因而,函数 $y(t)$ 不是连续的. 于是,空间 X 不是道路连通空间.

2.2.2 分离公理

X 为拓扑空间,若对任何两点 $x, y \in X, x \neq y$,存在不相交的邻域 $U(x), U(y)$, $U(x) \cap U(y) = \varnothing$,则称 X 为 **Hausdorff 空间**. 在 Hausdorff 空间中,每一点 $x \in X$ 是闭集. 实际上,若 $y \neq x$,则存在 y 的邻域 $U(y)$,它不包含 x. 于是集合 $X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y \neq x} U(y)$是开集,而它的补(余集)由一点组成,并且是闭集.

离散拓扑空间是 Hausdorff 空间. 事实上,每一点 $x \in X$ 是开集,就是说,若 $x \neq y$,则邻域$\{x\}$和邻域$\{y\}$是不相交的.

设 X 和 Y 都是 Hausdorff 拓扑空间,则它们的笛卡儿乘积,连通和及不连通和都是 Hausdorff 拓扑空间.

所有的度量空间都是 Hausdorff 空间. 此外,度量空间的两个不相交的闭集 F_1 和 F_2,存在它们的不相交的两个邻域 $U_1 \supset F_1, U_1 \supset F_2$.

事实上,设 X 是度量空间,度量为 ρ, F_1 和 F_2 是不相交的闭集. 设 $x \in F_1, \varepsilon(x) = \frac{1}{3}\rho(x, F_2)$. 令 $U_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} O_{\varepsilon(x)}(x)$. 类似地,定义开集 $U_2 = \bigcup\limits_{y \in F_2} O_{\varepsilon'(y)}(y)$,其中 $\varepsilon'(y) = \frac{1}{3}\rho(y, F_1)$. 从而得到集合 F_1 和 F_2 的邻域. 我们证明集合 U_1 和 U_2 是不相交的. 假定它们相交,就是说存在点 $z \in U_1 \cap U_2$. 那么存在点 $x \in F_1$ 和 $y \in F_2$,有 $z \in O_{\varepsilon(x)}(x), z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$,即 $\rho(x,z) < \frac{1}{3}\rho(x, F_2), \rho(y,z) < \frac{1}{3}\rho(y, F_1)$. 特别,有 $\rho(x,z) < \frac{1}{3}\rho(x,y), \rho(y,z) < \frac{1}{3}\rho(y,x)$. 将后面的两个不等式相加,得到 $\rho(x,z) + \rho(y,z) < \frac{2}{3}\rho(x,y)$,这与三角不等式相矛盾.

设有拓扑空间 X 的开集族$\{U_\alpha\}$,若 $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$,则称$\{U_\alpha\}$为**开覆盖**. 在研究拓扑空间时,"覆盖"是一个合适的概念. 例如,若在每一个 U_α 中给出了连续函数 f_α,

而在每一个交 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上,函数 f_α 和 f_β 是相同的,则在空间 X 上存在一个连续函数 f,它在每一个开集 U_α 中与 f_α 相同.

设 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{V_\beta\}$ 是拓扑空间 X 的两个开覆盖. 若每一个开集 V_β 都在某个开集 U_α, $\alpha=\alpha(\beta)$ 之中,则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 是覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的**加细**,或说**覆盖 $\{V_\beta\}$ 更细于覆盖 $\{U_\alpha\}$**.

定理 3 设 X 是度量拓扑空间, $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 是有限开覆盖. 则存在更细的覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$,而且 $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

证明 在定理 3 中所断定的不单是存在更细的覆盖,而是在该覆盖中的元素仍以指标 α 编号,并且集合的包含是对同一个指标值 α 进行的. 我们考察在 U_1 中不相交的闭集 $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha$ 和 $X \setminus U_1$. 于是存在邻域 V_1,使 $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$. 那么集合系 $\{V_1, U_2, \cdots, U_N\}$ 覆盖空间 X. 从而,可以找到集合 $V_2 \subset \overline{V}_2$,而且集合系 $\{V_1, V_2, U_3, \cdots, U_N\}$ 也覆盖空间 X. 依次地用集合 $V_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$ 代替 U_k,在 N 次后,得到所要求的覆盖 $\{V_1, \cdots, V_N\}$.

习　题

1. 证明:若从 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中删去有限(或可数)个点,留下的空间仍然是连通的.
2. 证明:若从 $\mathbf{R}^n$ 中删去维数小于 $n-1$ 的有限个子空间,则留下的空间仍是连通的.
3. 计算用有限多条直线把 $\mathbf{R}^2$ 最多能分成多少个连通分支,最少能分成多少个连通分支?
4. 设 $f: X \to X$ 是 Hausdorff 空间的连续映射. 证明不动点(即 $f(x)=x$)的集合是闭集.
5. 证明空间 X 是 Hausdorff 空间的充要条件为:对角线 $\Delta = \{(x,y) \mid x=y\} \subset X \times X$ 在 $X \times X$ 中是闭集.
6. 证明:映入 Hausdorff 空间 Y 的映射 $f: X \to Y$ 是连续的充要条件为:图形 $\Gamma_f = \{(x, f(x)): x \in X\} \subset X \times Y$ 在 $X \times Y$ 中是闭集.

2.3 紧致空间

在这一节中我们研究紧致性,这是拓扑空间的重要性质之一. 这个性质,特别是在研究实数和连续函数时,是基本的性质.

2.3.1 紧致空间

定义 1 设 X 为 Hausdorff 空间,若每一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 都具有覆盖 X 的有限部分 $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$,则称 X 是**紧致的**.

可以只要求存在更细的有限覆盖.

注 最初,这样的空间称为**列紧的**,而列紧的度量空间称为紧致空间. 但是近来的文献中喜欢简单地称列紧空间为紧致空间. 我们将采用后来的术语.

例1 实数轴上的有限区间$[a,b]$是紧致空间. 实际上,若$\{U_\alpha\}$是区间$[a,b]$的开覆盖,那么不失一般性,可以认为覆盖的每一个元素U_α是区间(c_α,d_α)(除两个半开区间$[a,a')$和$(b',b]$外). 设数$x\in[a,b]$,能使区间$[a,x]$被有限个U_α所覆盖,我们考察所有这样的数x的集合P. 那么,若$x\in P,y<x$,则y也属于P. 因为a属于覆盖的元素$[a,a')$,$a'>a$,则组成集合P的元素多于一个点a. 设x_0是集合P的上确界,$x_0>a$. 若$x_0<b$,则x_0在某个区间$U_{\alpha_0}=(c_{\alpha_0},d_{\alpha_0})$中,即$c_{\alpha_0}<x_0<d_{\alpha_0}$. 设$y,z$是满足$c_{\alpha_0}<y<x_0<z<d_{\alpha_0}$的数,则$y\in P$,也就是说有限个集合$U_\beta$覆盖了区间$[a,y]$,所以区间$[a,z]$也被有限个集合$U_\beta$所覆盖. 于是,$x_0$不是集合$P$的上确界. 这样,便有$x_0=b$. 这时$b'<x_0=b$. 若$b'<y<x_0$,则$y\in P$,而且区间$[a,y]$仍被有限个集合$U_\beta$所覆盖,而与$(b',b]$一起,整个区间$[a,b]$被有限个集合$U_\beta$所覆盖.

2.3.2 紧致空间的性质

定理1 设$F\subset X$是Hausdorff拓扑空间X的紧致子空间,则F在空间X中是闭集.

证明 设x是空间X的不属于F的任意点. 由于X是Hausdorff空间,对点$y\in F$,存在不相交的邻域$U_y\ni y$和$V_y\ni x$. 则族$\{U_y\}$覆盖集合F,而由于它的紧致性,存在有限族$\{U_{y_k}\}_{k=1}^N$覆盖F. 那么并$\bigcup\limits_{k=1}^N U_{y_k}$包含集合$F$,并且与交$\bigcap\limits_{k=1}^N V_{y_k}$不相交. 于是点$x$有与集合$F$不相交的邻域,这就是说集合$F$是闭集. 定理证毕.

定理2 设$f:X\to Y$是紧致空间X到空间Y的连续映射,则像$f(x)$是紧致空间.

证明 设$\{U_\alpha\}$是集合$f(x)$的开覆盖. 那么族$\{f^{-1}(U_\alpha)\}$是紧致空间X的开覆盖. 于是,某个有限族$\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^N$覆盖了空间$X$. 这时族$\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$覆盖了像$f(X)$. 定理证毕.

由定理1和定理2得出数学分析教程中已经知道的,紧致空间上连续函数的下列性质.

定理3 设$f:X\to\mathbf{R}^1$是紧致空间X上的连续函数,则函数f是有界的,并且取到最大值和最小值.

证明 按照定理2,像$f(X)$是$\mathbf{R}^1$中的紧致子空间,而按照定理1,像$f(X)$是闭集. 假如像$f(X)$不是有界的,那么区间族$U_n=(-n,n)$覆盖$f(X)$,并从中不可能分出有限子覆盖. 假设$A=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$,$B=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$. 那么,$A$和$B$都是$f(X)$的接触点. 因为集合$f(X)$是闭的,所以$A,B\in f(X)$. 定理证毕.

2.3.3 紧致的度量空间

对度量空间来讲,紧致的性质可以用分析中所熟悉的术语来叙述.

定理4 设X是度量空间. 空间X是紧致的充要条件为满足下列等价的性质之一:

1° 任何序列$\{x_n\}$有收敛子序列.

2° 任何非空的闭子集套序列$\{F_n\}$, $F_n \supset F_{n+1}$, 有非空的交.

作为定理4的推论,我们导出实数的基本性质:实直线上的闭线段套有公共点.

2.3.4 在紧致空间上的运算

如果Hausdorff空间X是它自己的有限个紧致子空间的并,则X是紧致空间.

定理5 紧致度量空间X和Y的笛卡儿乘积$X \times Y$是紧致空间.

注 实际上,按照定理4,我们考察序列$\{z_n\}$, $z_n = (x_n, y_n)$. 因为X是紧致空间,那么存在收敛子序列$\{x_{n_k}\}$. 而由于空间Y的紧致性,从序列$\{y_{n_k}\}$中分出收敛子序列$\{y_{n_{k_s}}\}$. 于是,子序列$\{z_{n_{k_s}}\}$也收敛.

习 题

1. 证明有限个紧致空间的并是紧致的.
2. 证明:若X是非紧致的度量空间,则在此空间上存在连续而非有界的函数.
3. 证明紧致的度量空间有可数个稠密的子空间.
4. 证明:在紧致的度量空间中,若两个闭集A和B不相交,则$\rho(A,B) > 0$.

2.4 函数的可分离性 1的分解

在这一节中,我们引出一些定理,使得在相当弱的假定下,也像一元实变函数那样进行连续函数的分析. 如早先已指出的那样,拓扑空间上的连续函数在许多方面也像一元实变函数一样. 两个连续函数的和$f+g$,乘积$f \cdot g$以及在$g \neq 0$时的比f/g,它们都是连续函数. 在拓扑空间X上的连续函数类中可以求极限. 设有函数序列f_n,若对任意$\varepsilon > 0$,存在这样的指标N,使当$n > N$时,对任何点$x \in X$满足不等式$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$,则称$f_n$ **均匀收敛于函数f**.

定理1 在拓扑空间X上的连续函数序列的均匀极限是连续函数.

证明 设$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 我们证明函数$f$是连续的. 固定数$\varepsilon > 0$和点$x_0 \in X$. 那么可以找到这样的指标数$n$,使得对任何点$x \in X$,满足不等式$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. 因为函数$f_n$连续,则存在邻域$O(x_0)$,使当$x \in O(x_0)$时,满足不等式$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. 于是,在$x \in O(x_0)$时,有

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

定理证毕.

2.4.1　函数的可分离性

若 F_1, F_2 是拓扑空间 X 中的两个不相交的闭集，那么为了作出集合 F_1 和 F_2 的不相交的邻域，在空间 X 上只要作出这样的连续函数 f 即可：设 $a>b$，

$$f(x)\begin{cases}\geqslant a, & \text{当 } x\in F_1,\\ \leqslant b, & \text{当 } x\in F_2.\end{cases}$$

这时，可以选取区间 $(c,\infty),(-\infty,c)\,(b<c<a)$ 的原像 $f^{-1}((c,\infty)), f^{-1}((-\infty,c))$ 分别作为集合 F_1 和 F_2 的邻域. 在某种意义下，其相反的论断也是正确的.

定理 2（Урысон（Urysohn）引理）　设 X 是正规拓扑空间，F_0, F_1 是两个不相交的闭集. 则存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使 $f|_{F_0}\equiv 0, f|_{F_1}\equiv 1$.

证明　作出这样的一系列开集 Γ_r，用所有的二进位有理数 $r(0\leqslant r\leqslant 1)$ 编上号码，且满足下面的条件：1）$F_0\subset\Gamma_0$，2）$\overline{\Gamma}_1\subset X\setminus F_1$，3）当 $r<r'$ 时，$\overline{\Gamma}_r\subset\Gamma_{r'}$.

于是，可以扩大开集系 $\{\Gamma_r\}$，在其中增加 $\Gamma_t=\bigcup\limits_{r<t}\Gamma_r$，这里 t 已是满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的任意实数. 开集系 $\{\Gamma_t\}$ 满足同样的条件：$\overline{\Gamma}_t\subset\Gamma_{t'}$，当 $t<t'$ 时成立. 实际上，取有理数 r,r'，使 $t<r<r'<t'$，得到 $\Gamma_t\subset\Gamma_r\subset\Gamma_{r'}\subset\Gamma_{t'}$，于是 $\overline{\Gamma}_t\subset\overline{\Gamma}_r\subset\Gamma_{r'}\subset\Gamma_{t'}$. 现在作连续函数 $f: X\to[0,1]$，假定 $x\in\Gamma_0$ 时，$f(x)=0$；$x\notin\Gamma_0$ 时，$f(x)=\sup\{t: x\notin\Gamma_t\}$. 我们证明 f 是连续函数. 固定一点 x_0 和 $\varepsilon>0$，设 $t_0=f(x_0)$. 由函数 f 的定义：$x_0\notin\Gamma_{(t_0-\varepsilon/2)}, x_0\in\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$. 我们考察点 x_0 的邻域 U，$U=\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}\setminus\overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. 于是，若 $y\in U$，则 $y\in\Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}, y\notin\overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. 根据函数 f 的定义，满足不等式：$t_0-\varepsilon/2\leqslant f(y)\leqslant t_0+\varepsilon/2$，即 $|f(x_0)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. 于是，函数 f 是连续的. 此外，若 $x\in F_0$，则 $f(x)=0$；若 $x\in F_1$，则 $f(x)=1$.

为完成定理 2 的证明，剩下的是作出满足条件 1），2），3）的开集系 Γ_r. 由空间 X 的正规性，对任何闭集 F 和它的邻域 U，$F\subset U$，存在另外的开集 V，使 $F\subset V\subset\overline{V}\subset U$. 为简便起见，若 $V\subset\overline{V}\subset U$，就写为 $V\Subset U$. 于是，$F_0=\overline{F}_0\subset X\setminus F_1$，可写为 $F_0\Subset X\setminus F_1$. 因此，可找到开集 Γ_0，使 $F_0\Subset\Gamma_0\Subset X\setminus F_1$. 类似地，可找到开集 Γ_1，使 $F_1\Subset\Gamma_0\Subset\Gamma_1\Subset X\setminus F_1$. 假设对所有的二进位分数 $r=p/2^n, 0\leqslant p\leqslant 2^n$，已作出了开集 Γ_r，而且 $\Gamma_{p/2^n}\Subset\Gamma_{(p+1)/2^n}$. 那么可定义集合 $\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}$，使 $\Gamma_{p/2^n}\Subset\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}\Subset\Gamma_{(p+1)/2^n}$. 根据归纳法，可作出所有的开集系 $\{\Gamma_r\}$. 若 $x\in F_0$，则 $f(x)=0$，而若 $x\in F_1$，则 $f(x)=1$. 这样，便证明了定理 2.

由定理 2 可以得到下面的关于连续函数的延拓定理.

定理 3　设 X 是正规拓扑空间，$F\subset X$ 是闭集，$f: F\to\mathbf{R}^1$ 是 F 上的连续函数. 那么函数 F 可延拓为整个空间 X 上的连续函数 $g: X\to\mathbf{R}^1$. 若函数 f 是有界的，$|f(x)|\leqslant A$，则 g 也有界，并可取同样的常数为界：$|g(x)|\leqslant A$.

证明　首先假设 f 有界，$|f(x)|\leqslant A$. 设 $\varphi_0(x)=f(x)$ 并考察两个闭子集 $A_0=$

$\{x: \varphi_0(x) \leqslant -A/3\}$, $B_0 = \{x: \varphi_0(x) \geqslant A/3\}$. 因为集合 A_0 和 B_0 不相交，所以按照定理 2，存在连续函数 $f_0: x \to [-A/3, A/3]$，在集合 A_0 上等于 $-A/3$，在集合 B_0 上等于 $A/3$. 换句话说，$|f_0(x)| \leqslant A/3, x \in X$, $|\varphi_0(x) - f_0(x)| \leqslant 2A/3$. 设 $\varphi_1 = \varphi_0(x) - f_0(x)$. 则函数 φ_1 在集合 F 上有界，以常数 $2A/3$ 为界. 所以，重复整个过程，可以作出两个不相交的闭集：$A_1 = \{x: \varphi_1(x) \leqslant -2A/9\}$, $B_1 = \{x: \varphi_1(x) \geqslant 2A/9\}$，并且有连续函数 $f_1: X \to [-2A/9, 2A/9]$，它在集合 A_1 上等于 $-2A/9$，在集合 B_1 上等于 $2A/9$. 换句话说，$|f_1(x)| \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}A$, $|\varphi_1(x) - f_1(x)| \leqslant 4A/9$. 重复所指出的过程无限次，我们作出了两个函数序列：$f_n: X \to \mathbf{R}^1$, $\varphi_n: F \to \mathbf{R}^1$，满足下面的条件：

$$
\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(x) &= \varphi_n(x) - f_n(x), \\
|f_n(x)| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3}, \\
|\varphi_n(x)| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n A.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

还有，当 $x \in F$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \varphi_0(x) = f_0(x) + \varphi_1(x) = \cdots \\
&= f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \varphi_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

由于不等式(2.3)，级数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ 在整个空间 X 上均匀收敛. 按照定理 1，$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ 是连续函数，且 $x \in F$ 时，$g(x) = f(x)$. 由于不等式(2.3)：

$$
|g(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{A}{3} = A.
$$

对 f 为有界函数的情形定理已证.

对一般的情形，我们考察同胚 $h: \mathbf{R}^1 \to (-1,1)$. 则复合 $hf: F \to (-1,1)$ 是连续有界函数. 对有界函数 hf 应用定理 3，作出连续函数 $g: X \to [-1,1]$，它是将函数 hf 延拓而得到的函数. 函数在与集合 F 不相交的某个闭集 F_1 上取到值 ± 1. 按照定理 2，存在连续函数 $\psi: X \to [0,1]$，它在集合 F 上等于 1，而在集合 F_1 上等于 0. 从而函数 $g_1(x) = \psi(x)g(x), x \in X$ 与函数 hf 在集合 F 上完全相同，并且不取值 ± 1. 于是，函数 g_1 映射空间 X 到区间 $(-1,1)$. 最后，设 $g(x) = h^{-1}g_1(x)$. 则 $g: X \to \mathbf{R}^1$ 是连续的，并且当 $x \in F$ 时，$g(x) = h^{-1}g_1(x) = h^{-1}hf(x) = f(x)$. 定理完全得证.

2.4.2 1 的分解①

f 为拓扑空间 X 上的连续函数，称由使 $f(x) \neq 0$ 的 $x \in X$ 组成的点集的闭包为

---

① 也称为单位分解.

f的**支集**. 函数f的支集用 $\mathrm{supp}\, f$ 表示. 于是在支集外面,函数f恒等于0. 拓扑学中一个有名的方法是把函数分解为这样的和,使其每一个被加项有足够小的支集.

定理4 设X是度量空间,$\{U_\alpha\}$是有限开覆盖. 则存在函数 $\varphi_\alpha: X\to\mathbf{R}^1$, $0\leqslant\varphi_\alpha(x)\leqslant 1$,使 1° $\mathrm{supp}\,\varphi_\alpha\subset U_\alpha$, 2° $\sum\limits_\alpha\varphi_\alpha(x)\equiv 1$.

定理4中所指出的函数系$\{\varphi_\alpha\}$称为**附属于覆盖$\{U_\alpha\}$的1的分解**.

证明 考察有限覆盖$\{U_\alpha\}$. 根据2.2的定理3,可以找到更细的覆盖$\{V_\alpha\}$,并且$\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$. 按照定理2,存在空间$X$上的连续函数$\psi_\alpha$,满足条件:$\psi_\alpha|_{\overline{V}_\alpha}=1$, $\psi_\alpha|_{(X\setminus U_\alpha)}\equiv 0$, $0\leqslant\psi_\alpha(x)\leqslant 1$. 这就是说,$\mathrm{supp}\psi_\alpha\subset U_\alpha$,且当$x\in V_\alpha$时,$\psi_\alpha(x)>0$. 设$\psi(x)=\sum\limits_\alpha\psi_\alpha(x)$. 函数$\psi$是连续的. 我们指出在每一点$x\in X$,$\psi(x)>0$. 实际上,因为系$\{V_\alpha\}$覆盖空间$X$,所以有这样的指标$\alpha_0$,使$x\in V_{\alpha_0}$,即$\psi_{\alpha_0}(x)>0$. 于是$\psi(x)=\sum\limits_\alpha\psi_\alpha(x)\geqslant\psi_{\alpha_0}(x)>0$. 最后,令$\varphi_\alpha(x)=\psi_\alpha(x)/\psi(x)$. 则

$$\mathrm{supp}\varphi_\alpha=\mathrm{supp}\psi_\alpha\subset U_\alpha,\ 0\leqslant\varphi_\alpha(x)\leqslant 1.$$

并且

$$\sum_\alpha\varphi_\alpha(x)=\sum(\psi_\alpha(x)/\psi(x))=(\sum\psi_\alpha(x))/\psi(x)=\psi(x)/\psi(x)=1.$$

定理证毕.

习 题

1. 证明:若X是欧氏空间$\mathbf{R}^n$时,则在定理2中可要求函数是光滑的.
2. 证明:在$X=\mathbf{R}^n$时,则在定理4中可以要求函数φ_α是光滑的.
3. 对圆周,作出1的分解的函数系,要求

1° 连续函数系;

2° 光滑函数系.

4. 证明:对圆周,不存在解析函数系的1的分解.
5. 作出第3、4题在$\mathbf{R}^{n+1}$中球面($S^n=\{x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$)情形的推广.

第三章 光滑流形[①]（一般理论）

在第一章中，已经用不同的例子说明了描述点在空间位置的坐标系是研究几何对象的主要工具.借助于坐标系就可以利用微积分的方法来解决许多问题.所以在几何中分出独立的一章来研究这样的空间，这种空间允许有像可微函数或光滑函数，微分运算以及积分运算这样的概念.

考察几个这种空间的例子是有益的.

例 1 考察平面（即二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$）上单位半径的圆周 S^1. 为了借助于坐标系来描述圆周的点，我们把它作为满足方程

$$x^2+y^2=1 \tag{3.1}$$

的点的集合来给出，其中(x,y)是平面上点的笛卡儿坐标. 于是，每一点 $P\in S^1$ 由数对——笛卡儿坐标 x 和 y 唯一地给出. 但是对圆周上的点，给出 x 和 y 两个坐标是多余的. 若我们已经知道点 P 的坐标 x，那么第二个坐标 y 可由方程(3.1)得到：$y=\pm\sqrt{1-x^2}$，即第二个坐标 y 从第一个坐标 x 唯一地（可相差一个符号）得到. 并且，若点 $P_0=(x_0,y_0)$的位置不在横轴上，即 $y_0\neq 0$，那么可找到点 P_0 的足够小的邻域 U，使对一切的点 $P\in U$，其 y 坐标符号的选择唯一地由点 P_0 的坐标 y_0 的符号所确定. 在某种意义下，我们可以说，圆周 S^1 上的点可由一个参数描述，这参数就是它的第一个笛卡儿坐标 x. 更确切地说，仅仅可以断定，在上半圆周中的点，即满足不等式 $y>0$ 的点，唯一地由一个参数 x 给出. 类似地，在下半圆周中的点，即满足不等式 $y<0$ 的点，也唯一地由一个参数 x 给出. 无论是上半圆周，还是下半圆

① 即微分流形——译注.

周,参数 x 的变化范围是同一个,这就是实轴上的区间 $(-1,1)$. 如果我们希望用类似方式以参数来描述包括剩下的"特别"点 $P_0=(1,0)$,$P_1=(-1,0)$ 在内的圆周上的点,那么交换坐标 x 和 y 的地位,并从方程(3.1)用坐标 y 来表示坐标 x 就可以了.

要问,直接以某个参数值唯一地给出圆周上所有的点,这样进行圆周 S^1 上的点的参数化不行吗? 对这个问题的答案,最接近于理想的方案是取角参数 φ,φ 是横轴与末端在 P 点的向径之间的角. 但是角参数的确定不是唯一的. 如果我们限制角 φ 的值于某个区间上,比方说 $0<\varphi\leqslant 2\pi$,那么将点 $P\in S^1$ 与角参数值 φ 相对应的这个函数在点 $P_0=(1,0)$ 将发生间断.

于是,可以作出下面的结论:在圆周 S^1(像在拓扑空间上一样)上不存在这样的连续函数,它的值可唯一地确定圆周的点.

例 2 作为第二个例子,我们考察三维欧氏空间中由方程

$$x^2+y^2+z^2=1$$

给出的二维球面 S^2.

与圆周的情形一样,对球面 S^2 的点,给出所有的三个笛卡儿坐标 (x,y,z) 是多余的,因为,比方说,可以用前两个坐标来表示坐标 z:$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$. 很显然,在上半球面(类似地,在下半球面)点 P 的坐标 z 唯一地用前两个坐标 x 和 y 表示.

可以表明,在二维球面 S^2 的情形也不可能找到二元连续函数①,按照它的值唯一地确定球面上的点 P.

我们所考察的例子指出,仅有一条出路——放弃对所考察空间的所有点构造统一坐标系的企图,而是对于空间的不同部分用它自己的坐标系就算满足了. 这个构造的严格描述就在几何上引出专门的流形的概念.

3.1 流形的概念

3.1.1 基本的定义

若度量空间 M 的每一点 P 都包含在同胚于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 某一区域 V 的邻域 $U\subset M$ 中,则称 M 为 **n 维流形**(或简称为**流形**). 这个条件简略地用下面的方式来叙述:n 维流形 M 局部地与欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的区域同胚. 并且说**流形 M 的维数**等于 n,并记为 $\dim M=n$. 于是,若 M 是 n 维流形,那么在空间 M 中可以指出开集系 $\{U_i\}$,它以指标 i 的某个集合(有限集或无限集)编号,和集合 U_i 到区域 V_i 的同胚 φ_i: $U_i\to V_i\subset\mathbf{R}^n$. 并且开集系 $\{U_i\}$ 应该覆盖空间 M: $M=\bigcup\limits_i U_i$. 一般地说,区域 V_i 之间

① 原文为:"две непрывные функции",意思是"两个连续函数"——译注。

可以相交. 集合 U_α 和同胚 φ_α 一起称为**图**.

假设在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中建立了某个笛卡儿坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$，如 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数组. 于是复合函数 $x^k=x^k(P)=x^k(\varphi_\alpha(P))$，①$P\in U_\alpha$ 给出了开集 U_α 上的函数组，称为图 U_α 上的局部坐标系. 图的全体$\{U_i\}$覆盖了整个流形 M，$\{U_\alpha\}$称为**图册**. 点 $P\in M$ 的局部坐标编上补充的指标，即图编上自己的号码，U_α: $x_\alpha^k=x_\alpha^k(P)$，这样表示是方便的. 因为点 P 可能同时属于几个图，所以它具有几组局部坐标.

我们考察流形的最简单的例子.

例 1　在本章开始我们考察了由方程 $x^2+y^2=1$ 给出的圆周 $S^1\subset\mathbf{R}^2$. 我们用下面四个图组成的图册来覆盖 S^1（图 3.1）

$$U_1=\{(x,y)\in S^1: y>0\},U_2=\{(x,y)\in S^1: y<0\},$$
$$U_3=\{(x,y)\in S^1: x>0\},U_4=\{(x,y)\in S^1: x<0\},$$

它们对应的区域 V_1,V_2,V_3,V_4 在实直线 $\mathbf{R}^1$ 上是一致的，并且等于开区间$(-1,1)$. 我们构造同胚 φ_1 和 φ_2 作为圆周在横轴上的射影：$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)=x$，而同胚 φ_3,φ_4 是在纵轴上的射影：$\varphi_3(x,y)=\varphi_4(x,y)=y$. 为证明映射 $\varphi_k(k=1,\cdots,4)$是同胚，只要把逆映射写为显式的形式即可

$$\varphi_1^{-1}(x)=(x,\sqrt{1-x^2})\in S^1,\varphi_2^{-1}(x)=(x,-\sqrt{1-x^2})\in S^1,$$
$$\varphi_3^{-1}(y)=(\sqrt{1-y^2},y)\in S^1,\varphi_4^{-1}(y)=(-\sqrt{1-y^2},y)\in S^1,$$

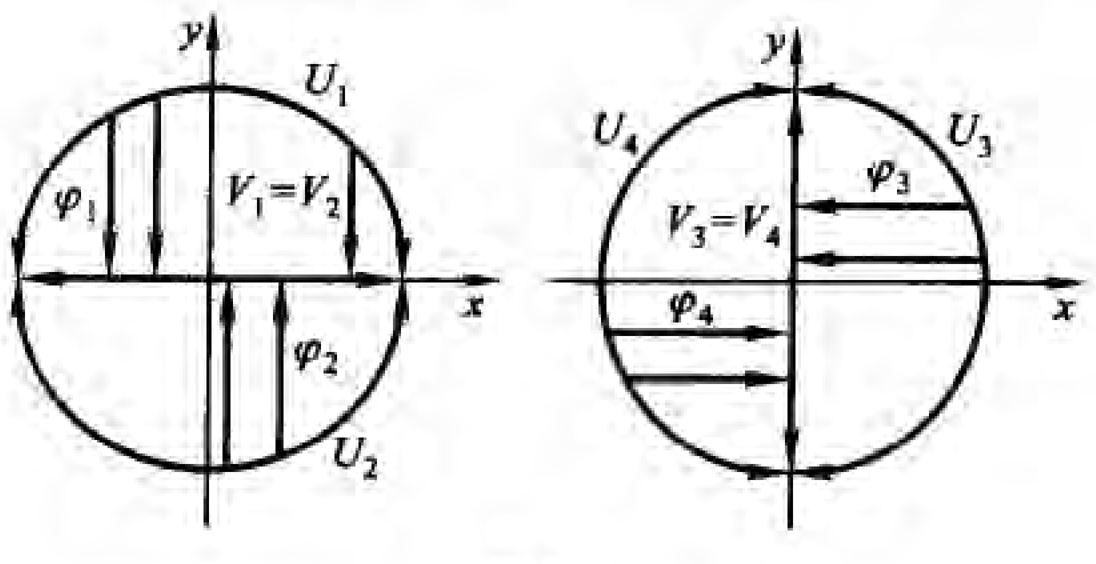


图 3.1

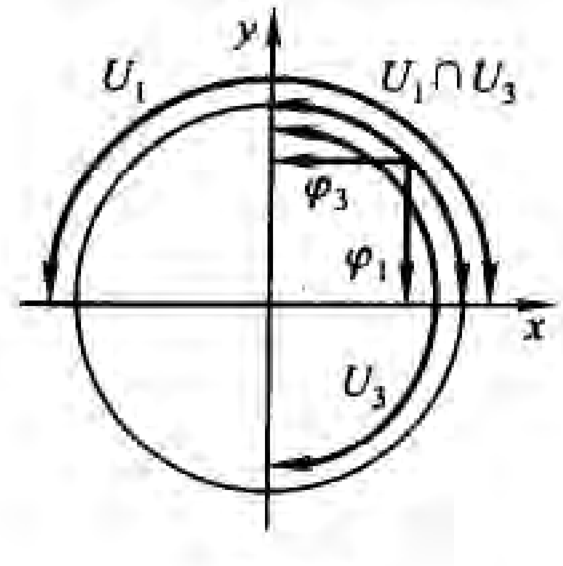


图 3.2

从而相信，逆映射是连续的. 那么，在圆周上得到了四个局部坐标系，其每一个坐标系都由一个坐标组成：$x_1=\varphi_1(x,y)=x,x_2=\varphi_2(x,y)=x,x_3=\varphi_3(x,y)=y,x_4=\varphi_4(x,y)=y$. 某些点同时具备两个局部坐标系. 例如，对交 $U_1\cap U_3$ 中的点 P 确定了坐标 $x_1(P)$和 $x_3(P)$（图 3.2）. 在圆周上还有其他方法以引进图册. 在第一章中，我们考察了平面上的极坐标(r,φ). 在极坐标下，圆周的方程具有简单的形式：

---

①　严格地说，在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的笛卡儿坐标$(x^1,\cdots,x^n)$是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数，而使向量$a\in\mathbf{R}^n$与它的坐标组$(x^1(a),\cdots,x^n(a))$对应，确定了 $\mathbf{R}^n$ 到 n 维线性算术空间的映射. 所以写作 $x^k=x^k(P)=x^k(\varphi_\alpha(P))$较好. 若不引起误解的话，为简便起见，我们就省略掉记号 φ_α. ——原《教程》中的注.

$r=1$. 严格地说,平面上的极坐标不是坐标系(参看第 1 章). 所以在圆周 S^1 上,我们引进两个图:$U_1=\{(x,y)\in S^1:x\neq -1\}$,$U_2=\{(x,y)\in S^1:x\neq 1\}$(图 3.3). 假设 $\varphi_1(P)=\varphi_1(x,y)$ 等于角 φ 的值 $\varphi\in(-\pi,\pi)$,而 $\varphi_2(P)=\varphi_2(x,y)$ 等于角 φ 的值:$\varphi\in(0,2\pi)$,即 $V_1=(-\pi,\pi)$,$V_2=(0,2\pi)$. 很明显,对上半圆周的点局部坐标 $\varphi_1(P)$ 和 $\varphi_2(P)$ 是一致的,并且对下半圆周的点局部坐标是不一致的,即当 $y>0$ 时,$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)$;当 $y<0$ 时,$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)-2\pi$(图 3.4).

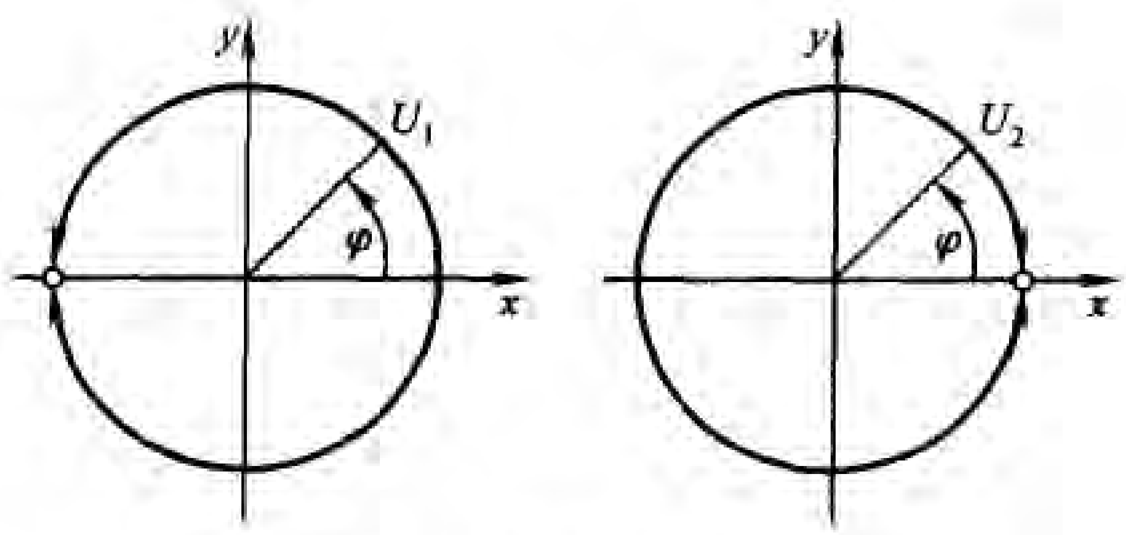


图 3.3

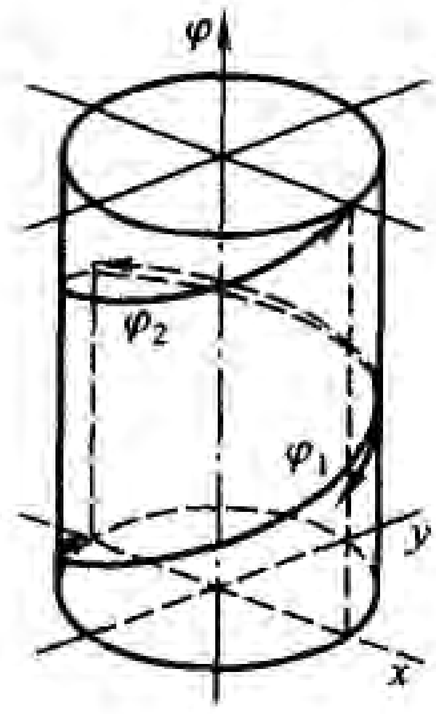


图 3.4

例 2 在例 1 中考察的圆周 S^1 已是十分复杂的流形了. 最简单的例子是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 本身. 图册可以仅由一个图 $U=\mathbf{R}^n$ 组成,坐标同胚 φ 是恒等映射 $\varphi: U\to V=\mathbf{R}^n$,局部坐标系是 $\mathbf{R}^n$ 中点的笛卡儿坐标. 类似地,任何区域 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是 n 维流形,其图册也是由一个具有笛卡儿坐标系的图组成.

例 3 考察 $\mathbf{R}^{n+1}$中满足方程$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$ 的点集,它是半径为 1 的 n 维球面 S^n. 我们证明,n 维球面是 n 维流形. 取开集

$$U_i^+=\{(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\in S^n:x^i>0\},$$
$$U_i^-=\{(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\in S^n:x^i<0\}$$

作为图册. 坐标同胚 φ_i^+ 和 φ_i^- 定义为欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$到 $\mathbf{R}^n$ 沿着坐标 x^i 的射影. 那么区域 V_i^+ 与 V_i^- 相互重合,并且等于单位半径的球.

例 4 我们考察射影平面 RP^2. 我们把它表示为这样的空间,$\mathbf{R}^3$ 中过坐标原点的所有直线被宣布为空间中的点. 我们定义两直线间的距离为它们之间的较小的角. 于是 RP^2 变成度量空间. 我们证明,RP^2 是 2 维的流形. 为此,给每一直线 $P\in RP^2$ 以三个齐次坐标$(x:y:z)$,用$(\lambda x:\lambda y:\lambda z)(\lambda\neq 0)$表示同一直线 $P\in RP^2$ 是方便的. 齐次坐标不同时为 0,即 $x^2+y^2+z^2>0$. 我们用三个图来覆盖 RP^2:$U_1=\{(x:y:z)\mid x\neq 0\}$,$U_2=\{(x:y:z)\mid y\neq 0\}$,$U_3=\{(x:y:z)\mid z\neq 0\}$. 设 $V_1=V_2=V_3=\mathbf{R}^2$. 取下面的映射作为坐标同胚:$\varphi_k: U_k\to V_k=\mathbf{R}^2$:$\varphi_1(x:y:z)=(y/x,z/x)$,$\varphi_2(x:y:z)=(x/y,z/y)$,$\varphi_3(x:y:z)=(x/z,y/z)$. 于是作出了三个局部坐标系

$$x_1^1 = y/x, x_1^2 = z/x; x_2^1 = x/y, x_2^2 = z/y; x_3^1 = x/z, x_3^2 = y/z.$$

我们考察过的例子表明了在同一个流形 M 上可以建立不同的图册. 甚至若保留作为开集的图不变,还可以用选择另外坐标同胚的方法来改变图中的局部坐标系.

若 $U' \subset U$ 是 U 的开子集,坐标函数在 U' 上的限制则得到新的图,它比原来的图 U 更细.

设 $\{U_i\}$, $\{U'_j\}$ 是流形 M 上的两个图册. 则存在第三个图册,它比 $\{U_i\}$ 和 $\{U'_j\}$ 两者都细. 这个新的图,例如,可以由原来的两个图册中的图成对的图的交组成.

3.1.2 坐标变换函数 光滑流形的定义

定义 1 设 M 是 n 维流形, $\{U_\alpha\}$ 是它的图册, φ_α 是坐标同胚, $\{x_\alpha^k\}$ 是一组局部坐标系. 在两个图的每一个交 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ 中,定义了两个局部坐标系 $\{x_\alpha^k\}$ 和 $\{x_\beta^k\}$,而且一个图中的坐标函数 $x_\alpha^i(P)$ 可以通过另一个图中的坐标函数表示为 $x_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(x_\beta^1(P), \cdots, x_\beta^n(P))$, $P \in U_{\alpha\beta}$. 函数 $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^n)$ 称为**坐标变换函数**或称为把坐标 $\{x_\alpha^k\}$ 变为坐标 $\{x_\beta^k\}$ 的**转换函数**.

坐标变换函数不是定义在整个区域 V_β 中,而是定义在它的某一部分 $V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ 中凡是说及两个坐标系是有意义的地方.

为方便起见,在图 3.5 中,欧氏空间的区域 V_α 和 V_β 是作为不相交的集合画出的.

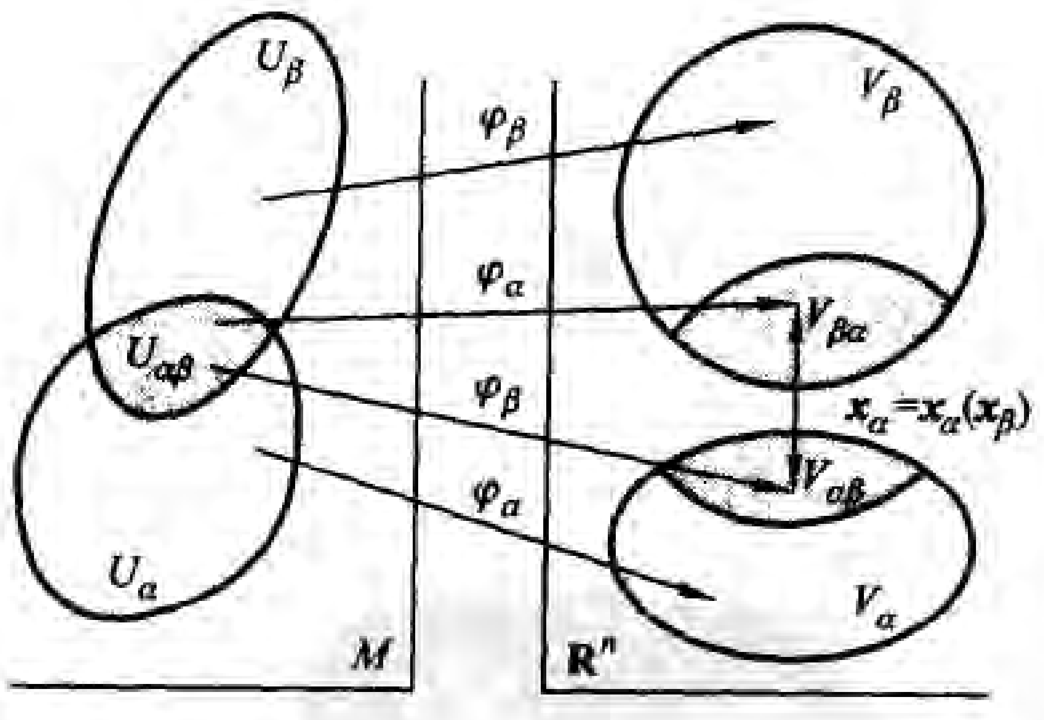


图 3.5

坐标变换函数 $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^n)$ 实现了 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 $V_{\beta\alpha}$ 到区域 $V_{\alpha\beta}$ 的联列映射

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}(\boldsymbol{x}_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_\beta).$$

定义 2 n 维流形 M,其图册 $\{U_\alpha\}$ 的局部坐标系 $\{x_\alpha^k\}$ 满足条件:对任何一对图 U_α, U_β,坐标变换函数 $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^n)$ 在它们的整个定义区域中是连续可微的

函数.则称流形 M 是 n **维光滑流形**.

定义3　定义在光滑流形 M 上的函数 $f:M\to\mathbf{R}^1$,若在任何局部坐标系 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$(图 $U_\alpha\ni P_0$ 属于所建立的图册中)中,函数 f 在点 $(x_\alpha^1(P_0),\cdots,x_\alpha^n(P_0))$ 的邻域中表示为 n 个独立变量的连续可微的函数 $h(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$.则称函数 $f:M\to\mathbf{R}^1$ 为在点 $P_0\in M$ **是连续可微的**.

例5　我们考察下面的流形 M 上的图册的例子.设 $M=\mathbf{R}^1$ 是实直线,图册由两个同样的图 $U_1=U_2=M=\mathbf{R}^1$ 组成,但是具有不同的坐标系.在 U_1 上给出坐标 $x_1=x,x\in\mathbf{R}^1$,而在 U_2 上用公式 $x_2=(x)^3$ 给出坐标.那么坐标变换函数为

$$x_2=x_2(x_1)=(x_1)^3,\tag{3.2}$$

$$x_1=x_1(x_2)=\sqrt[3]{x_2}.\tag{3.3}$$

若坐标变换函数(3.2)是连续可微的函数(多项式),那么函数(3.3)具有不连续的导数.所以按照定义2,具有图册 $\{U_1,U_2\}$ 的流形 M 不是光滑流形.

注　若流形 M 上的图册由一个图(即当 M 同胚于欧氏空间中的区域时)组成,则 M 是光滑流形.

定义4　在流形 M 上给出两个图册 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{U'_\beta\}$,并且关于其中每一个图册,M 都是光滑流形.若由图册 $\{U_i\}$ 中的每一个局部坐标系到图册 $\{U'_j\}$ 中的任何一个局部坐标系的转换函数都是连续可微的函数.则称两个图册 $\{U_i\}$ 和 $\{U'_j\}$ **是等价的**.

下面事实说明定义4是合理的.*在流形 M 上定义的任何函数 f 在图册 $\{U_\alpha\}$ 中是连续可微的,当且仅当它在图册 $\{U'_\beta\}$ 中是连续可微的.* 于是,从在流形 M 上连续可微的函数的观点来看,等价的图册是平等的,并且对于把函数表示为独立变数(点的坐标)的连续可微的实值函数来讲,可以利用等价的图册中任何一个图册.

我们提醒一下,若在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 的邻域中实值函数 $h(x^1,\cdots,x^n)$ 的直到 r 阶(包括 r 阶)的所有偏导数存在并且连续,则函数 h 在这点的邻域中是 $C^r(r=1,2,\cdots,\infty)$ 类光滑的函数.$r=\infty$ 的情形,是指函数 h 的所有阶偏导数存在并且连续.

定义5　对建立了图册 $\{U_i\}$ 的流形 M,若所有的坐标变换函数在其定义域中的所有的点是 C^r 类光滑函数,则称流形 M 是 C^r **类光滑流形**.

今后,如果没有相反的说明,我们所讲的流形都是 C^∞ 类的光滑流形,而流形上的函数是 C^∞ 类光滑函数.

例6　我们使例5改变样子.在第二个图 U_2 中取坐标 $x_2=x+x\cdot|x|$.于是流形是 C^1 类光滑流形,但不是 C^2 类光滑流形.

注　以后若无相反的声明,我们仅考察 C^∞ 类光滑流形,而在流形上的函数是 C^∞ 类光滑函数.

在例1-4中,我们所考察的带有图册的流形自然都是 C^∞ 类光滑流形.

在几何中还考虑给图册及其坐标变换函数以另外更强的条件.例如,若所有的

坐标函数是实解析函数，即在它有定义的每一点的邻域中能展为收敛的泰勒级数，则此流形称为**实解析流形**. 实解析流形是 C^∞ 类光滑流形.

比较重要的一类流形是复解析流形. 设 M 是 $2n$ 维流形，$\{U_\beta\}$ 是它的图册，$\varphi_\beta: U_\beta \to V_\beta \subset \mathbf{R}^{2n}$ 是它的坐标同胚. 使 $2n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 与 n 维复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 等同，即认为点 $(z^1,\cdots,z^n)$ 的复坐标给出了 $2n$ 个实坐标 $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$，$z^k = x^k + \mathrm{i}y^k$. 那么在图 U_β 中的 $2n$ 个坐标函数 $x_\beta^1(P),\cdots,x_\beta^n(P),y_\beta^1(P),\cdots,y_\beta^n(P)$ 化为 n 个复值函数 $z_\beta^k = x_\beta^k(P) + \mathrm{i}y_\beta^k(P)$. 我们称函数 $z_\beta^k(P)$ 为在图 U_β 中点的复坐标. 在两个图的交 $U_\beta \cap U_\gamma$ 中，我们有从一个坐标系到另一个的转换函数

$$x_\beta^k = x_\beta^k(x_\gamma^1,\cdots,x_\gamma^n,y_\gamma^1,\cdots,y_\gamma^n),$$
$$y_\beta^k = y_\beta^k(x_\gamma^1,\cdots,x_\gamma^n,y_\gamma^1,\cdots,y_\gamma^n),$$

它们可以表示为 n 个独立的复变量的复值函数

$$z_\beta^k = z_\beta^k(z_\gamma^1,\cdots,z_\gamma^n). \tag{3.4}$$

我们称函数(3.4)为复坐标转换函数或复坐标变换函数.

建立了图册 $\{U_\beta\}$ 和局部复坐标系 $(z_\beta^1,\cdots,z_\beta^n)$ 的流形 M，若所有的复坐标变换函数(3.4)是复解析函数，即在它定义域的每一点的邻域中能展开为复变数的收敛泰勒级数，则称 M 为**复解析流形**.

我们考察二维球面 S^2，并在其上专门构造一套图册，作为容许有复解析流形结构的流形的例子. 在第一章中已作出了球面 $S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ 从北极 $P_0 = (0,0,1)$ 到坐标平面 (x,y) 的球极射影. 我们用 φ_0 表示这个映射. 映射 φ_0 把球面 S^2 上除极点 P_0 以外的所有点，即开集 $U_0 = S^2 \setminus (P_0)$ 同胚地映射到整个平面 $V_0 = \mathbf{R}^2$. 在笛卡儿坐标下，同胚 φ_0 为：$\varphi_0(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$. 所以在图 U_0 中引进一个用球面上点的笛卡儿坐标表示的复坐标 $w_0 = \frac{x+\mathrm{i}y}{1-z}$. 此外，考察南极 $P_1 = (0,0,-1)$ 和从南极到同一个坐标平面 (x,y) 的球极射影 φ_1. 映射 φ_1 同胚地把集合 $U_1 = S^2 \setminus (P_1)$ 映射到整个平面 $V_1 = \mathbf{R}^2$. 在笛卡儿坐标下，映射 φ_1 为：$\varphi_1(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$. 我们在图 U_1 中引进复坐标 $w_1 = \frac{x-\mathrm{i}y}{1+z}$. 那么在交 $U_0 \cap U_1$ 中得到

$$w_0 = w_0(w_1) = \frac{1}{w_1}, w_1 = w_1(w_0) = \frac{1}{w_0}. \tag{3.5}$$

函数(3.5)是复解析函数. 就是说球面 S^2 是复解析流形.

3.1.3 光滑流形 微分同胚

设 M_1 和 M_2 是两个光滑流形，$f: M_1 \to M_2$ 是连续映射.

定义 6 光滑流形的映射 $f: M_1 \to M_2$，若对任意点 $P_0 \in M_1$ 的邻域中的任何局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 和点 $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ 的邻域中的任何局部坐标系 $(y^1,\cdots,$

y^m)，函数 f 的向量函数表示式 $\boldsymbol{y}=(y^k)=(h^k(x^1,\cdots,x^n))=h(\boldsymbol{x})$ 是 $C^r(r=1,2,\cdots,\infty)$ 类光滑的向量函数，则称映射 f 为 C^r **类光滑映射**.

注意，C^r 类光滑映射的定义仅在流形 M_1 与 M_2 的光滑类数不小于 r 时才有意义.

设 $f:M_1\to M_2$ 是流形的同胚. 若 f 是 C^r 类光滑映射，那么逆映射 f^{-1} 不一定是光滑映射. 若逆映射 $f^{-1}:M_2\to M_1$ 也是 C^r 类光滑映射，则同胚 f 称为 C^r **类光滑同胚**或 C^r **类微分同胚**. 光滑流形间的微分同胚起着与拓扑空间中的同胚相同的作用. 若 $f:M_1\to M_2$ 是微分同胚，则流形 M_1 和 M_2 称为**微分同胚的流形**.

定理 1　设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑流形的 C^r 类光滑同胚，则 $\dim M_1=\dim M_2$.

证明　在流形 M_1 上，取局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$，在流形 M_2 上，点 Q_0 的邻域 V_0 上，取局部坐标 $(y^1,\cdots,y^m)$. 设 $g=f^{-1}$ 是 f 的逆映射. 那么，映射 f 和 g 可用两个向量函数表示，它们用字母表示，即 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{y})$，而且 $g(f(\boldsymbol{x}))\equiv\boldsymbol{x}$，$f(g(\boldsymbol{y}))\equiv\boldsymbol{y}$. 换句话说，对函数 f 和 g 有等式

$$gf=Id_x,fg=Id_y,$$

这里 Id_x,Id_y 是向量空间的恒等映射. 也就是说，对 Jacobi 矩阵有类似的等式：

$$(dg)(df)=E_x,(df)(dg)=E_y,$$

这里 E_x,E_y 是相应维数的单位矩阵.

由线性代数知道，两个矩阵乘积的秩，不超过每个因子的秩. 所以，$\mathrm{rank}dh\leqslant\min(m,n)$，$dh^{-1}\leqslant\min(m,n)$（矩阵 dh,dh^{-1} 是长方矩阵！），所以 $\mathrm{rank}de_0\leqslant\min(m,n)$，$\mathrm{rank}de_1\leqslant\min(m,n)$. 于是，$m\leqslant\min(m,n)$，$n\leqslant\min(m,n)$，或 $\max(m,n)\leqslant\min(m,n)$，这就是说，$m=n$. 定理证毕.

最后，我们引进关于图册的两个有名的论断.

引理 1　在光滑流形 M 中存在这样的图册 $\{U_i\}$，其每一个图 U_i 都与 $\mathbf{R}^n$ 微分同胚.

证明　首先证明可以作出这样的图册，其每一个图都与 $\mathbf{R}^n$ 中某个半径为 ε 的开球微分同胚. 设 $P_0\in M$ 是任意点，$U_\alpha\ni P_0$，$\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbf{R}^n$ 是坐标同胚，$Q_0=\varphi_\alpha(P_0)$. 因为 V_α 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，所以存在这样的数 ε，使中心在点 Q_0，半径为 ε 的开球包含在 V_α 中. 用 $O_\varepsilon(Q_0)$ 表示这个开球，而用 W_P 表示它的原像 $\varphi_\alpha^{-1}(O_\varepsilon(Q_0))$. 开集族 $\{W_P\}$ 是流形 M 上的图册，并且每一个图 W_P 与 $\mathbf{R}^n$ 的开球微分同胚. 为完成引理的证明，我们证明半径是 ε 的开球与 $\mathbf{R}^n$ 微分同胚. 考虑 $\varepsilon=1$ 的情形就够了. 于是，设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是半径为 1 的球中的点，$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2<1$. 设

$$\begin{aligned}y^k&=\frac{x^k}{\sqrt{1-(x^1)^2-\cdots-(x^n)^2}},\\x^k&=\frac{y^k}{\sqrt{1+(y^1)^2+\cdots+(y^n)^2}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

函数(3.6)是光滑的函数，并且也是实现半径为1的球到 $\mathbf{R}^n$ 的互逆的映射. 引理证毕.

引理2 设 M 是光滑的紧致流形，$\{U_\alpha\}$ 是其图册. 则存在附属于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的1的光滑分解 ψ_α，即

$$0 \leqslant \psi_\alpha \leqslant 1, \sum \psi_\alpha = 1, \operatorname{supp}\psi_\alpha \subset U_\alpha.$$

证明 根据引理1可认为所有的图都与半径为1的球同胚. 设 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to D_1^n \subset \mathbf{R}^n$ 是坐标同胚①. 取这样的足够小的 $\varepsilon > 0$，使 $\{\varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)\}$ 覆盖流形 M. 假设存在球 D_1^n 上的 C^∞ 类函数 f，使 $\operatorname{supp} f = D_{(1-\varepsilon)}^n$，$0 \leqslant f \leqslant 1$. 设

$$\bar{\psi}_\alpha(P) = \begin{cases} 0, & P \in U_\alpha, \\ f(\varphi_\alpha(P)), & P \in U_\alpha. \end{cases}$$

因为当 $P \in \varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$ 时，$f(\varphi_\alpha(P)) = 0$. 所以函数 $\bar{\psi}_\alpha$ 在流形 M 上是光滑函数，而且 $\operatorname{supp} \bar{\psi}_\alpha \subset U_\alpha$，$0 \leqslant \bar{\psi}_\alpha \leqslant 1$. 此外还有 $\operatorname{supp} \psi_\alpha \supset \varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$. 于是，函数 $\bar{\psi}_\alpha$ 的和 $\bar{\psi}(P) = \sum_\alpha \bar{\psi}_\alpha(P)$ 在每一点都严格地大于0. 这时我们设 $\psi_\alpha(P) = \bar{\psi}_\alpha(P)/\bar{\psi}(P)$. 函数 $\psi_\alpha(P)$ 组成了附属于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的1的光滑分解.

于是，就剩下构造 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^∞ 类函数 f，使它的支集等于球 $D_{(1-\varepsilon)}^n$. 我们将寻找形式为 $f(x^1, \cdots, x^n) = h((x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2)$ 的函数 f. 于是作出单变量的光滑函数 $h(x)$，使当 $x > (1-\varepsilon)^2$ 时，$h(x) = 0$；当 $x < (1-\varepsilon)^2$ 时，$h(x) > 0$ 就足够了. 取函数

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-(1-\varepsilon)^2)^2}, & x < (1-\varepsilon)^2, \\ 0, & x \geqslant (1-\varepsilon)^2 \end{cases}$$

作为所要求的函数，这函数已知是 C^∞ 类光滑函数. 引理证毕.

习　题

1. 证明：平面上无弹性的线段在平面中的位置空间是光滑流形.
2. 证明：群 $SO(3)$ 同胚于三维射影空间.
3. 描绘三维空间中两个用铰链联结的杆子所组成的系统的构形空间.
4. 举出光滑的、双方单值的映射，但不是微分同胚的例子.
5. 证明：在球面 S^n 上不存在由一个图组成的图册.

3.2 用方程给出流形

在前面几节中(第一章中也有)，流形的许多例子是作为欧氏空间的某个非线性方程的解的集合出现的. 例如，n 维球面 S^n 由欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的方程 $(x^1)^2 + \cdots +$

① 这里 D_r^n 表示中心在坐标原点半径为 r 的开球.

$(x^{n+1})^2=1$ 给出；伪球面 S_1^2 由方程 $x^2+y^2-z^2=-1$ 给出. 一般地，若 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 是连续可微的函数，则方程 $f(x^1,\cdots,x^n)-c=0$ 解的集合称为**函数 f 的 c 等高线流形**. 于是，整个欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 分解为函数 f 的等高线流形的并. 在两个变量的函数情形，方程的解通常称为函数 f 的**等高线**. 而在三个变量的函数情形，则为**等高曲面**.

为说明名称"函数 f 的等高线流形"是正确的，必须证明函数 f 的等高线流形确实是流形. 但是，实际上不总是如此.

例 1　考察函数 $f(x,y)=x^2-y^2$. 它的等高线由方程 $x^2-y^2=c$ 描述. 若 $c>0$，则等高线由两个连通分支组成，其中每一个分别由方程 $x=\sqrt{c+y^2}$，$x=-\sqrt{c+y^2}$ 中的一个描述，即它们是单变量函数的图形(图 3.6). 类似地，当 $c<0$ 时，等高线由两个函数 $y=\sqrt{x^2-c}$，$y=-\sqrt{x^2-c}$ 的图形组成. 于是在 $c\neq 0$ 时，等高线是一维流形. 在 $c=0$ 时的等高线表示特别的情形. 在这种情况下，等高线由一对相交直线 $y=x$，$y=-x$ 组成，并且不是一个流形.

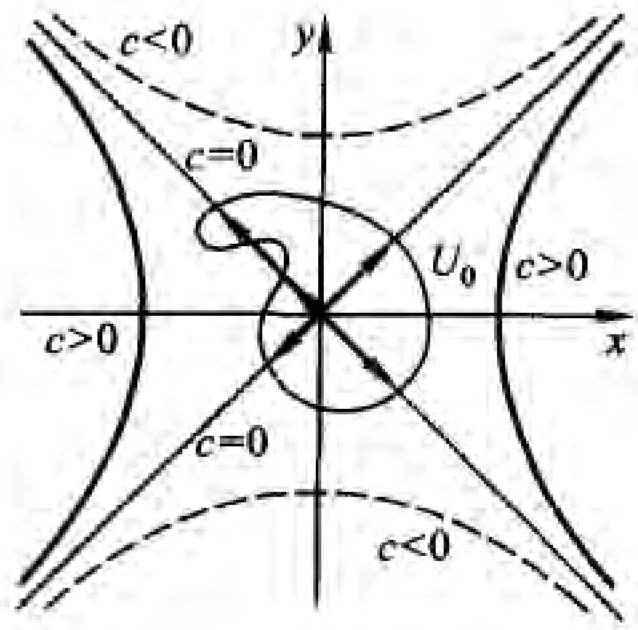


图 3.6

虽然如此，在某种意义下，连续可微的函数 f 的等高线流形几乎都是流形.

定理 1　设 $f=f(x^1,\cdots,x^n)$ 是定义在整个欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 C^∞ 类函数. 设 $M_c=\{(x^1,\cdots,x^n):f(x^1,\cdots,x^n)=c\}$. 若函数 f 的梯度在集合 M_c 的每一点不等于零，则 M_c 是 C^∞ 类的 $(n-1)$ 维光滑流形. 同时在每一点 $P_0\in M_c$ 的邻域中，可以取其外围欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的某 $(n-1)$ 个笛卡儿坐标作为局部坐标.

证明　其实定理 1 是用方便的术语叙述的隐函数定理. 固定某一点 $P_0\in M_c$，$P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$. 因为

$$\operatorname{grad}_{P_0}f\neq 0,\ \operatorname{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

因此在 P_0 点不为 0 的偏导数存在. 不失一般性，可认为 $\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\neq 0$. 设 $Q_0=(x_0^1,\cdots,x_0^{n-1})$ 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的点，它是 P_0 沿坐标轴 x^n 投影的像. 根据隐函数定理，存在这样的点 Q_0 的邻域 $V_0\ni Q_0$，区间 $(x_0^n-\delta,x_0^n+\delta)$，以及定义在邻域 V_0 中的 C^∞ 类光滑连续函数 $y=y(x^1,\cdots,x^{n-1})$，使

1° $f(x^1,\cdots,x^{n-1},y(x^1,\cdots,x^{n-1}))\equiv c$ 在区域 V_0 中成立，

2° $x_0^n=y(x_0^1,\cdots,x_0^{n-1})$，

3° $|x_0^n-y(x^1,\cdots,x^{n-1})|<\delta$ 在区域 V_0 中成立，

4° 方程 $f(x^1,\cdots,x^n)=c$ 的所有解 $(x^1,\cdots,x^n)\in V_0\times(x_0^n-\delta,x_0^n+\delta)$ 具有形式 $x^n=y(x^1,\cdots,x^{n-1})$.

当用 U_0 表示点 $P_0\in M_c$ 的邻域时，则有 $U_0=M_c\cap(V_0\times(x_0^n-\delta,x_0^n+\delta))$. 邻域

U_0 便是所求的包含点 P_0 的图. 取 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^{n-1}$的射影在 U_0 上的限制 $\varphi_0(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^{n-1})\in V_0$ 作为同胚 φ_0. 其逆映射 φ_0^{-1} 由等式

$$\varphi_0^{-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})=(x^1,\cdots,x^{n-1},y(x^1,\cdots,x^{n-1}))$$

给出.

由条件 3°得到,$\varphi_0^{-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})\in V_0\times(x_0^n-\delta,x_0^n+\delta)$,而由条件 1°,$\varphi_0^{-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})\in M_c$. 于是,$\varphi_0^{-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})\in U_0$. 映射 φ_0 和 φ_0^{-1} 是连续的,并且是互逆的.

我们证明了集合 M_c 是$(n-1)$维流形,并且指出了在每一点 $P_0\in M_c$ 的邻域中的局部坐标系由欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的某些笛卡儿坐标组成. 现在我们证明坐标变换函数是光滑函数. 设点 P_0 还包含在一个图 U_1 中,并且取笛卡儿坐标$(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$作为图 U_1 中的局部坐标. 那么在图的交 $U_0\cap U_1$ 中,坐标$(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$表示为坐标$(x^1,\cdots,x^{n-1})$的函数

$$\begin{aligned}
&x^1=x^1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&x^{i-1}=x^{i-1},\\
&x^{i+1}=x^{i+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&x^{n-1}=x^{n-1}\\
&x^n=y(x^1,\cdots,x^{n-1}).
\end{aligned}\tag{3.7}$$

因为 $y=y(x^1,\cdots,x^{n-1})$是 C^∞ 类光滑的函数,所以(3.7)中所有的函数也是 C^∞ 类光滑的. 定理证毕.

例 2 重新考察由方程$f(x^1,\cdots,x^{n+1})=\sum\limits_{k=1}^{n+1}(x^k)^2=1$ 给出的 n 维球面 S^n. 函数 f 的梯度等于 $\mathrm{grad}f=(2x^1,2x^2,\cdots,2x^{n+1})$. 若点 $P=(x^1,\cdots,x^{n+1})$在球面 S^n 上,那么它的坐标不全为 0,于是,梯度坐标中有一个不为 0. 满足定理 1 的条件,这就是说,球面 S^n 是 C^∞ 类光滑流形.

例 3 考察 n^2 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n^2}$. 把 $\mathbf{R}^{n^2}$中的点表示为具有坐标 $A=(a_{ij})$的 n 阶方阵 A. 考察行列式等于 1($\det A=1$)的所有矩阵 $A\in\mathbf{R}^{n^2}$的集合$SL(n,\mathbf{R})$. 集合$SL(n,\mathbf{R})$关于矩阵乘积的运算构成群并称为特殊线性群. 我们证明群 $SL(n,\mathbf{R})$是 C^∞ 类光滑流形,并且其维数为 n^2-1.

考虑 n^2 个变量的函数$f(a_{ij})=\det(a_{ij})$. 函数f是多项式,也就是说是 C^∞ 类光滑函数. 为了应用定理 1,应该计算函数 f 在群 $SL(n,\mathbf{R})$的所有的点的梯度. 设 E 是单位矩阵. 因为 $\det E=1$,所以 $E\in SL(n,\mathbf{R})$. 计算函数在点 E 的梯度. 为此,首先按第一行把 $\det A$ 展开

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}\det A_{1n}. \tag{3.8}$$

在展开式(3.8)中,有矩阵 A_{1k}的行列式,它们是(a_{ij})中除去第一行后的所有变量的多项式. 于是函数f关于 a_{11}的偏导数有形式:$\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial}{\partial a_{11}}(a_{11}\det A_{11}) = \det A_{11}$. 在 E 点,得到

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1. \tag{3.9}$$

于是,函数f在 E 点的梯度不等于0.

现在证明,在任意点 $A_0 \in SL(n,\mathbf{R})$,函数f的梯度也不等于0. 我们引进新的变量 b_{ij},它由下面等式给出:$(b_{ij}) = B = A_0^{-1}A = A_0^{-1}\cdot(a_{ij})$. 若 $A = A_0$,则 $B = E$. 那么

$$f(A) = f(A_0B) = \det(A_0B) = \det A_0 \cdot \det B = f(B).$$

微分上式,利用复合函数求导法则,得到

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij}\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)\cdot\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}. \tag{3.10}$$

按照公式(3.9),等式(3.10)的左边部分等于1. 于是右边部分至少一个被加项不为0,就是偏导数$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0)$中有一个不为0,和它一起,也有函数$f$的梯度不为0. 于是,定理1的条件得到满足,也就是群 $SL(n,\mathbf{R})$是光滑流形,维数为 n^2-1.

定理1容易推广到非线性方程组的情形. 我们指出,定理1的条件可用下面方式叙述. 函数f的梯度表示为函数f的偏导数行的形式,也就是函数f的 Jacobi 矩阵. 那么f的梯度在某点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$ 的非平凡性等价于函数f的 Jacobi 矩阵 df的秩等于1,即取最大的秩.

设给出方程组

$$\begin{aligned} f^1(x^1,\cdots,x^n) &= c^1,\\ f^2(x^1,\cdots,x^n) &= c^2,\\ &\cdots\cdots\\ f^k(x^1,\cdots,x^n) &= c^k, \end{aligned} \tag{3.11}$$

简略地可写为$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$,这里 $\boldsymbol{x} = (x^1,\cdots,x^n) \in \mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{c} = (c^1,\cdots,c^k) \in \mathbf{R}^k$,而$f$是映射,由函数$(f^1,\cdots,f^k)$所定义. 方程组(3.11)解的集合 M_c 称为函数组$(f^1,\cdots,f^k)$的等高线流形.

定理2 设$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ 是 C^∞ 类光滑映射,M_c 是方程组$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ 解的集合. 若映射f的 Jacobi 矩阵的秩在每一点 $P_0 \in M_c$ 都取最大的秩(即 $\operatorname{rank} df(P_0) = k$),则 M_c 是$(n-k)$维 C^∞ 类光滑流形. 同时,在每一点 $P_0 \in M_c$ 的邻域中,可以取外围欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的某$(n-k)$个笛卡儿坐标作为其局部坐标.

证明 定理2的证明是逐字逐句地重复定理1的证明,仅有的差别是,不是一

个变量 x^n,而是 k 个变量$(x^{i_1},\cdots,x^{i_k})$. 用一个字母来表示这组变量,譬如说 $\boldsymbol{y}=(x^{i_1},\cdots,x^{i_k})$. 我们将得到在定理 1 的证明中所得到过的同样的公式. 定理证毕.

例 4 在具有坐标(x^1,x^2,x^3,x^4)的欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 中,考察两个方程的方程组:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1,(x^3)^2+(x^4)^2=1. \tag{3.12}$$

相应的函数f_1 和f_2 有形式

$$f^1(x^1,x^2,x^3,x^4)=(x^1)^2+(x^2)^2,f^2(x^1,x^2,x^3,x^4)=(x^3)^2+(x^4)^2.$$

为了应用定理 2,我们来计算映射 $f=(f^1,f^2)$的 Jacobi 矩阵:

$$df=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^4}\\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x^1 & 2x^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4\end{pmatrix}.$$

很明显,仅当 Jacobi 矩阵的某一行的各个元素都等于零时,$\operatorname{rank} f\leqslant 1$,但这些点不可能是方程组(3.12)的解. 于是方程组(3.12)的解构成 2 维的 C^∞ 类光滑流形. 因为方程组(3.12)分为两个方程,每一个方程有自己的一组变量,所以解的集合也可以表示为每个方程各自解的笛卡儿乘积,即方程组(3.12)的解表示为两个圆周的乘积. 这个流形称为(二维)**环面**.

3.3 切向量 切空间

在第一章中看到,对研究曲线和曲面的度量性质,以及一般地,对研究欧氏空间区域的度量性质来说,所谓空间的无穷小性质起着重要的作用. 这样的性质是在固定点 P 的很小的邻域中,用忽略掉与到 P 点的距离相比是高阶小量的方法来确定的. 在数学分析中,在研究某点邻域中函数的性态时,有类似的略掉无穷小量的手续. 在研究光滑流形时,也希望实行略掉无穷小量的做法. 这些方法之一就是引进类似于曲线的切向量和曲面的切平面那样专门的概念.

3.3.1 简单的例子

我们考察三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中光滑曲线,用参数 t 使它参数化:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=(x^1(t),x^2(t),x^3(t))$. 固定一个参数值 t_0. 在点 t_0 的邻域中,将向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$用泰勒公式展开

$$\boldsymbol{x}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{x}(t_0)+\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t_0)\Delta t+O(\Delta t^2). \tag{3.13}$$

(3.13)的右边的前两项,一方面可看作在点 t_0 的邻域中用线性向量函数对向量函数 $\boldsymbol{x}(t)$的某种近似,另一方面这个线性函数 $\boldsymbol{y}(\Delta t)=\boldsymbol{x}(t_0)+\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t_0)\Delta t$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中为过点 $P_0=\boldsymbol{x}(t_0)$的直线的参数表示. 这个直线是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$在点 P_0 的切线,而沿着

直线的向量$\frac{dx}{dt}(t_0)$称为曲线$x(t)$在点P_0的**切向量**(图3.7).

现在考察三维空间$\mathbf{R}^3$中的曲面M,它由两个独立参数u,v的向量函数$x = x(u,v)$的参数形式给出.曲面$x(u,v)$,若偏导数$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$和$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$作为$\mathbf{R}^3$中的向量在每一点都是线性无关的,则称曲面$x(u,v)$是**正则**①**曲面**.按照泰勒公式在点$(u_0,v_0)$将函数$x(u,v)$展开

$$x(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) = x(u_0,v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v + O(\Delta u^2+\Delta v^2), \qquad (3.14)$$

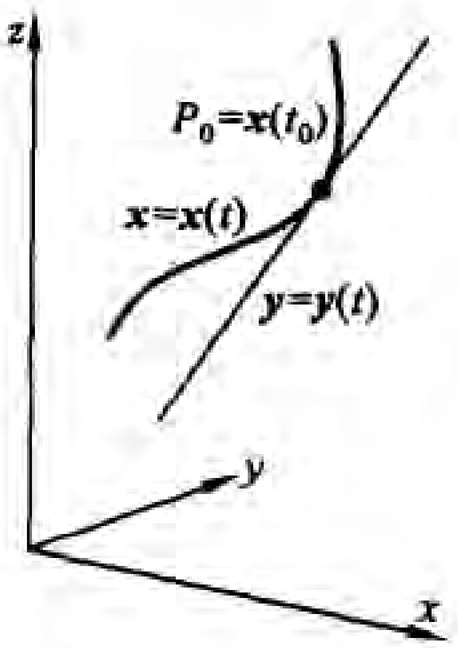


图3.7

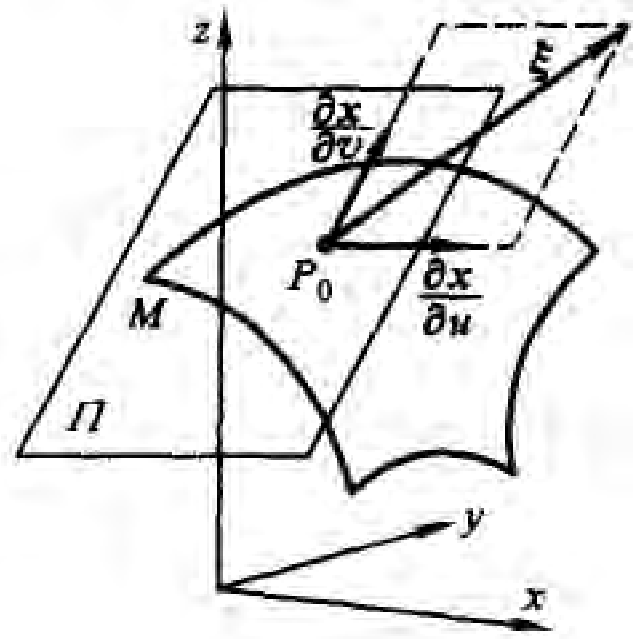


图3.8

我们得到,展开式(3.14)的线性部分表示了曲面M在点$P_0 = x(u_0,v_0)$的切平面Π,它是两个参数的表示式(图3.8).切平面Π上任何以P_0为起点的向量称为曲面M在点P_0的**切向量**.切向量ξ分解为向量$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)$和$\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)$的线性组合

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v,$$

其中$\Delta u,\Delta v$为适当选择的参数.这样,向量$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)$和$\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)$组成了切平面$\Pi$的基底,而量$\Delta u,\Delta v$便是切向量$\xi$在这个基底下的线性坐标.

现在,在曲面M上画出过点P_0的光滑曲线$x = x(t)$.因为曲线$x = x(t)$在曲面M上,所以它的参数式可以表示为函数$x(u,v)$与某些函数$u(t),v(t)$的合成:

$$x(t) = x(u(t),v(t)). \qquad (3.15)$$

这也可用另外的方式叙述:函数$u(t),v(t)$是在曲面M的局部坐标系(u,v)中曲线的参数表示.那么,曲线通过点P_0的条件可以写为坐标的条件:$u_0 = u(t_0)$,$v_0 =$

① 原文为“Невырожленный”(非退化的)——译注.

$v(t_0)$. 现在来计算曲线的切向量(或称为曲线的速度向量)

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t_0) &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}(u(t),v(t)))\Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u(t_0),v(t_0))\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u(t_0),v(t_0))\frac{dv}{dt}(t_0) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{dv}{dt}(t_0).\end{aligned}$$

于是,曲面 M 上曲线的切向量在切平面上.

定义 1 设 $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(u_0,v_0)\xi^1 + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(u_0,v_0)\xi^2$ 是曲面 M 在点 P_0 的切向量. 则数 (ξ^1,ξ^2) 称为**曲面 M 在点 P_0 的切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在曲面 M 的局部坐标系 (u,v) 中的坐标**.

若 (u',v') 是另外的坐标系,则坐标 u 和 v 表示为坐标 (u',v') 的光滑函数:$u = u(u',v')$, $v = v(u',v')$, $u_0 = u(u_0',v_0')$, $v_0 = v(u_0',v_0')$. 那么,看作函数的合成时,我们得到曲面 M 的新的参数式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u(u',v'),v(u',v')).$$

因此曲线(3.15)借助于某些函数 $u'(t)$, $v'(t)$ 可以写成 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(u(u'(t),v'(t)),v(u'(t),v'(t)))$. 那么,按照曲线的切向量在局部坐标系 (u',v') 中的坐标定义,数对 $\left(\frac{du'}{dt}(t_0),\frac{dv'}{dt}(t_0)\right)$ 是曲线的切向量的坐标. 微分复合函数,得到曲线的切向量在不同的局部坐标系中,其坐标之间的关系:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t_0) &= \frac{\partial u}{\partial u'}(u_0',v_0')\frac{du'}{dt}(t_0) + \frac{\partial u}{\partial v'}(u_0',v_0')\frac{dv'}{dt}(t_0), \\ \frac{dv}{dt}(t_0) &= \frac{\partial v}{\partial u'}(u_0',v_0')\frac{du'}{dt}(t_0) + \frac{\partial v}{\partial v'}(u_0',v_0')\frac{dv'}{dt}(t_0).\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3.2 切向量的一般定义

考察过的例子表明,可以给出流形切向量的一般定义.

定义 2 设 M 是光滑的 n 维流形,$P_0 \in M$ 是任意点. 使每一个局部坐标系 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 对应一组数 $(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^n)$,若对每一对局部坐标系满足下面的关系式

$$\xi_\alpha^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P_0)\xi_\beta^l, \tag{3.17}$$

则称此对应为**流形 M 上一点 P_0 的切向量**.

数 $(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^n)$ 称为切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在局部坐标系 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 中的坐标. 关系式(3.17)称为在局部坐标变换下切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的**坐标变换的张量规则**.

定义 2 推广了曲面上曲线的切向量的坐标概念. 那些坐标变化的规则(3.16)是流形上切向量坐标变换的张量规则(3.17)的特殊情形. 并且,光滑流形上的每一条光滑曲线的每一点具有定义 2 意义下的切向量. 我们把这个重要性质叙述为

命题.

命题1　设 M 是光滑流形,$\gamma:(-1,1)\to M$ 是区间 $(-1,1)$ 到流形 M 的光滑映射. 则使点 $P_0=\gamma(0)$ 的邻域中的每一个局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 对应一组数 $\left(\frac{dx^1}{dt}(\gamma(t)),\cdots,\frac{dx^n}{dt}(\gamma(t))\right)\Big|_{t=0}$ 的对应是定义2意义下的切向量.

为证明命题1,只要验证坐标变换的张量规则(3.17)即可. 设 $\xi_\beta^k=\frac{dx_\beta^k}{dt}(\gamma(t))\Big|_{t=0}$,这里 $(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^n)$ 是流形 M 上点 P_0 的邻域中的局部坐标系. 那么对两个局部坐标系,得到

$$
\begin{aligned}
\xi_\alpha^k &= \frac{d}{dt}x_\alpha^k(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}x_\alpha^k(x_\beta^1(\gamma(t)),\cdots,x_\beta^n(\gamma(t)))\Big|_{t=0}\\
&=\sum_{l=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(\gamma(t))\frac{d}{dt}x_\beta^l(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\sum_{l=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P_0)\xi_\beta^l,
\end{aligned}
$$

这就是张量规则(3.17). 命题证毕.

于是,在命题1中指出的对应很自然地称为**曲线 γ 的切向量**或**曲线 γ 的速度向量**. 曲线 γ 的切向量将表示为 $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$ 或 $\dot\gamma(t_0)$.

3.3.3　切空间 $T_{P_0}(M)$

流形 M 上固定点 P_0 的所有切向量的集合称为**流形 M 在点 P_0 的切空间**. 这个集合用 $T_{P_0}(M)$ 表示. 每一个切向量 $\xi\in T_{P_0}(M)$ 由其在一个固定坐标系中的坐标唯一确定. 实际上,若给我们一组数 $(\eta^1,\cdots,\eta^n)$,并且把这组数当作是在固定的局部坐标系 $(x_{\alpha_0}^1,\cdots,x_{\alpha_0}^n)$ 中所求切向量的坐标,即 $\eta^k=\xi_{\alpha_0}^k$,那么对给出整个切向量来讲,必须确定出它在每一个局部坐标系 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 中的坐标. 为此,设

$$\xi_\alpha^k=\sum_{l=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)\eta^l.$$

所得到的坐标应该满足坐标变换的张量规则(3.17):

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)\eta^l &= \sum_{s=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s}(P_0)\sum_{l=1}^n\frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)\eta^l\\
&=\sum_{l=1}^n\left(\sum_{s=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s}(P_0)\frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)\right)\eta^l.
\end{aligned}
$$

因为 $\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)=\sum_{s=1}^n\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s}(P_0)\frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0)$(三重坐标变换的 Jacobi 矩阵的变换规则),所以关系式(3.17)恒等地满足.

于是,我们已建立了流形 M 上点 P_0 的所有切向量的集合由它们在一个固定局部坐标系中的坐标来唯一地描述. 因而整个切空间 $T_{P_0}(M)$ 与算术向量空间 $\mathbf{R}^n$

可视为同一空间. 这就是说,切空间 $T_{P_0}(M)$ 可以具备线性空间的结构. $T_{P_0}(M)$ 中的线性空间的结构不依赖于点 P_0 邻域中局部坐标系的选择. 即下面的命题是正确的.

命题 2 切空间 $T_{P_0}(M)$ 中向量的加法运算和数乘向量的运算不依赖于流形 M 在点 P_0 邻域中的局部坐标系的选择.

证明 验证命题的正确性是基于切向量坐标变换的张量规则(3.17)的线性性.

3.3.4 函数的方向导数

还有一种表示流形 M 上切向量的方法,就是把流形 M 的切向量想像为光滑函数的微分运算.

定义 3 设 $P_0 \in M, \boldsymbol{\xi} \in T_{P_0}(M)$, $\gamma(t)$ 是过点 P_0 的光滑曲线, $\gamma(t_0) = P_0$ 并且它在点 P_0 的切向量等于 $\boldsymbol{\xi}$. 设 f 是流形 M 上的光滑函数. 称数

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \boldsymbol{\xi}(f) \tag{3.18}$$

为**函数 f 沿着切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的导数**. 求导数的运算称为**函数 f 沿着向量 $\boldsymbol{\xi}$ 微分**.

定理 1 设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是流形 M 上点 $P_0 = (x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 的邻域中的局部坐标系, $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1,\cdots,\xi^n)$ 是流形 M 在点 P_0 的切向量, $f = f(x^1,\cdots,x^n)$ 是点 P_0 的邻域中由局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 表示的光滑函数. 于是

$$\boldsymbol{\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i. \tag{3.19}$$

因此,导数的定义(3.18)不依赖于曲线 γ 的选择,而(3.19)的右边的部分不依赖于局部坐标系的选择.

证明 把过点 P_0 的曲线 $\gamma(t)$ 表示为坐标形式: $\gamma(t) = (x^1(t),\cdots,x^n(t))$. 则按曲线之切向量的定义, $\frac{dx^i}{dt}(t_0) = \xi^i$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(f) &= \frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}f(x^1(t),\cdots,x^n(t))\Big|_{t=t_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)\xi^i.\end{aligned}$$

定理证毕.

光滑函数 f 沿着切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的微分运算有下面两个性质:

1° 沿着向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的微分运算是线性的,即若 f 和 g 是两个光滑函数,而 λ, μ 是两个任意的数,则

$$\boldsymbol{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda \boldsymbol{\xi}(f) + \mu \boldsymbol{\xi}(g);$$

2° 沿着向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的微分运算满足牛顿－莱布尼茨公式:

若f和g是P_0邻域中的光滑函数,则函数f和g的乘积有如下公式:

$$\boldsymbol{\xi}(fg)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)\boldsymbol{\xi}(g)+\boldsymbol{\xi}(f)g(x_0^1,\cdots,x_0^n). \tag{3.20}$$

我们给出一般的定义.

定义4　设有运算A,它使光滑流形M上的C^∞类的每一个光滑函数f对应于数$A(f)$,并且后者满足性质1°和2°,则称A为**点$P_0\in M$的微分运算**.

定理2　设M是C^∞类光滑流形,$P_0\in M$是任意点,A是定义4意义下的微分运算.则运算A与点P_0的沿着某个(唯一的)切向量$\boldsymbol{\xi}$的微分一致.

证明　我们将在点P_0邻域的某个局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中寻求切向量而表示成坐标行的形式.这时可把所有光滑函数表示为变量$(x^1,\cdots,x^n)$的函数的形式.我们证明两个辅助的引理.

引理1　任一C^∞类光滑函数$f(x^1,\cdots,x^n)$可表示为

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)(x^i-x_0^i)+$$

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j), \tag{3.21}$$

其中$h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$是C^∞类光滑函数.

证明　我们写出恒等式

$$f(x^1,\cdots,x^n)\equiv f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\int_0^1\frac{d}{dt}f(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^n+t(x^n-x_0^n))\,dt,$$

并在积分号下关于t进行微分

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)h_i(x^1,\cdots,x^n), \tag{3.22}$$

其中,

$$h_i(x^1,\cdots,x^n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1+t(x^1-x_0^1),\cdots,x_0^n+t(x^n-x_0^n))\,dt \tag{3.23}$$

现在应用公式(3.22)到函数$h_i(x^1,\cdots,x^n)$本身,得到:

$$h_i(x^1,\cdots,x^n)=h_i(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{j=1}^n(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n). \tag{3.24}$$

将(3.24)代入(3.22)中,并考虑到(3.23):

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)+\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)+$$

$$\sum_{i,j=1}^n(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n).$$

引理2　设f,g是流形M上的两个光滑函数,满足$f(P_0)=g(P_0)=0$.则对点P_0的任何微分A,等式$A(fg)=0$成立.

证明　由牛顿－莱布尼茨公式(3.20)立刻得到.

现在,我们转到定理2的证明.把函数f表示为(3.21)的形式,并在其两边进

行微分运算 A. 由于运算是线性的,得到

$$A(f)=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(x^i-x_0^i)+$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}A((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)). \tag{3.25}$$

我们指出,对于等于 1 的常数函数,$A(1)=A(1\cdot 1)=A(1)\cdot 1+1\cdot A(1)=2A(1)=0$. 其次,在(3.25)的最右端和式中,表示为两个函数$(x^i-x_0^i)$和$(x^j-x_0^j)\cdot h_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$乘积的每一个被加项,在点 P_0 这两个函数都变为 0. 所以根据引理 2,$A((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)h_{ij}(x^1,\cdots,x^n))=0$. 于是,

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^n)A(x^i-x_i^0).$$

所以令 $\xi^i=A(x^i-x_0^i)$,我们得到这样的向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$,使

$$A(f)=\boldsymbol{\xi}(f).$$

定理证毕.

把在某个局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中求偏导数的运算看成光滑函数的微分的例子. 根据定理 2,运算$\frac{\partial}{\partial x^k}$是一个切向量,其坐标为$(0,\cdots,1,\cdots,0)$,这里 1 在指标为 k 的位置上. 因此切向量$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$构成切空间 $T_{P_0}(M)$ 的基底,而所有的切向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$可分解为线性组合 $\boldsymbol{\xi}=\xi^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\xi^n\frac{\partial}{\partial x^n}$.

3.3.5 切丛

流形 M 在点 P_0 的所有切向量的集合 $T_{P_0}(M)$,如我们已经知道的,是与流形 M 维数相同的线性空间. 流形 M 的所有切向量的总和表示为并 $\bigcup\limits_{P_0\in M}T_{P_0}(M)$. 这个空间记为 $T(M)$,并称为流形 M 的**切丛**.

考虑下面的例子:圆周 $S^1\subset\mathbf{R}^2$. 在图 3.9 上指出了圆周在点 P_0 和 Q_0 的两条切线和有共同终点的两个切向量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$. 所以,为使切丛 $T(S^1)$表示成安置在欧氏空间中的拓扑空间,必须转移到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中,并且把圆周的切线相对于平面(x,y)"转动"一个角,以使它们不再相交(参看图3.10). 这时切丛 $T(S^1)$变为单叶双曲面(几何的柱面). 同时失去了切空间 $T_{P_0}(S^1)$"紧密接近"于圆周的性质. 我们好像"脱离"了圆周的切线并"忘记"了"纤维"应当切于圆周 S^1. 为使 $T_{P_0}(S^1)$与 S^1 相切的性质不失去,并且使不同"纤维"不相交,可以将切丛嵌入 $\mathbf{R}^3$ 的方法作不大的改变. 这不是在整个圆周 S^1 上能够做到的,而仅在它的一部分弧上可能做到. 我们把弧作为螺旋线嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中,这时螺旋线的切线不相交(图 3.11).

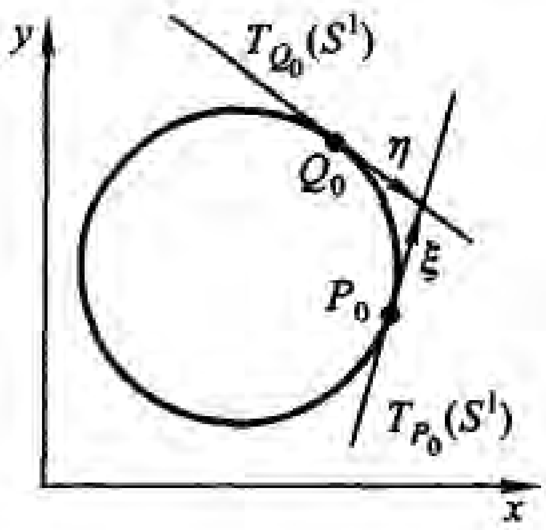


图 3.9

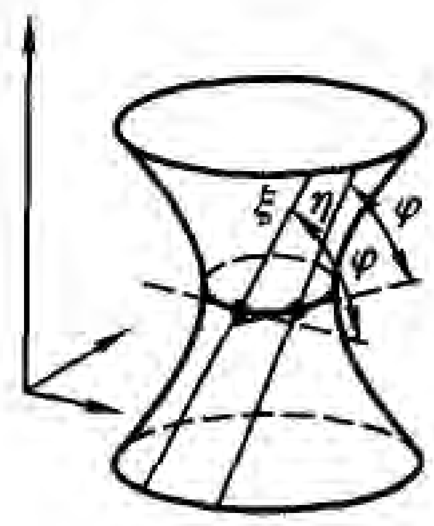


图 3.10

我们考察力学的某些例子,这些例子说明为了描述力学的体系,研究非平凡的流形以及它的切丛是适宜的.

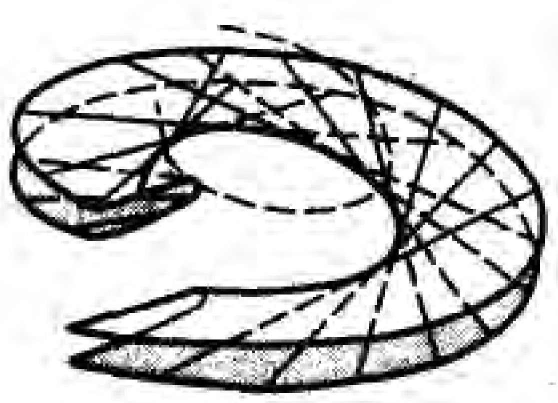


图 3.11

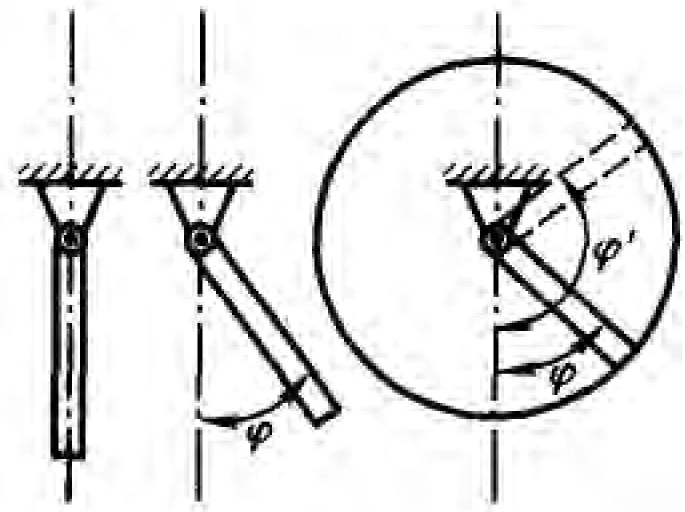


图 3.12

例 1 考察摆的平面运动,即用铰链固定其一端的刚体杆(图 3.12).这时杆的位置由一个参数确定,此参数就是杆的轴和铅垂线之间的角 φ. 因此,杆的所有位置的集合是圆周 S^1. 一切位置的集合称为**构形空间**.

考察两个铰链的摆——两个用铰链连接的杆(图 3.13). 摆的位置由两个角 φ_1 和 φ_2 确定,而所有的位置的集合表为二维的环面 $T^2=S^1\times S^1$. 图 3.14 表示了另一个系统,在这系统里,构形空间是嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中的环面.

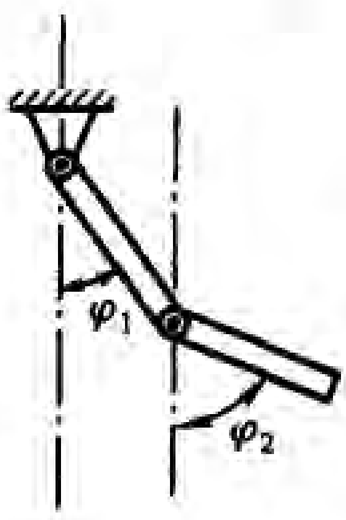


图 3.13

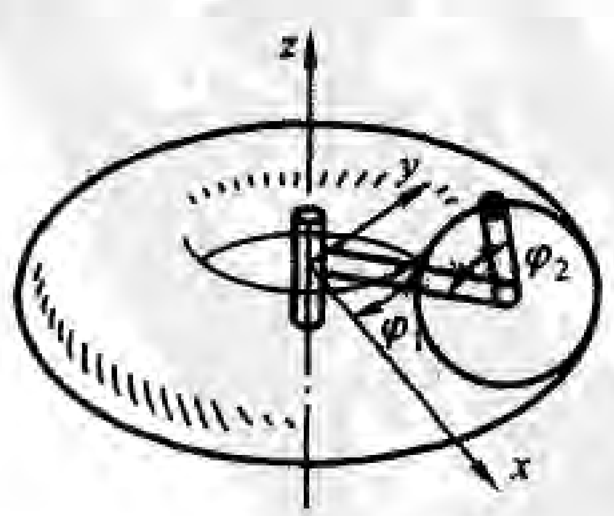


图 3.14

例 2 在力学中，通常用参数组来描述一个力学系统的运动. 这组参数描述系统的位置和其各部分速度的状况. 考虑到速度的力学系统的所有位置的集合称为**相位空间**. 那么相位空间自然地等同于构形空间的切丛. 例如，若质点在二维球面上以常数模的速度运动，那么相位空间在此情况下将是由等长切向量组成的切丛的子集.

例 3 也有构形空间和相位空间的更复杂的例子. 例如，考察具有固定点的刚性立体. 它在 $\mathbf{R}^3$ 中一切可能的位置可用下面的方法来描述. 在刚体上固定三个规范正交向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，始点在固定点. 那么，具有固定点的刚体的任何位置唯一地由这三个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的位置给出. 这样构形空间可等同于 $\mathbf{R}^3$ 中所有规范正交基集合的连通分支.

3.4 子流形

3.4.1 光滑映射的微分

定义 1 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑流形的光滑映射. $Q_0=f(P_0)$，在 P_0 及 $f(P_0)$ 的邻域的局部坐标系中，由映射 f 的 Jacobi 矩阵所定义的切空间 $T_{P_0}(M_1)$ 到切空间 $T_{Q_0}(M_2)$ 的线性映射称为**光滑映射 f 在点 $P_0\in M_1$ 的微分 df_{P_0}**.

微分 df_{P_0} 的定义 1，不依赖于点 $P_0\in M_1$ 和 $Q_0\in M_2$ 的邻域中的局部坐标系的选择. 为了说明这一点，只要用光滑流形微分的术语将定义 1 改写一下就可以了，在这个术语中根本没有任何局部坐标参与.

引理 1 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑映射，$f(P_0)=Q_0$，$\boldsymbol{\xi}\in T_{P_0}(M_1)$ 是流形 M_1 在点 P_0 的切向量，$\boldsymbol{\eta}=df_{P_0}(\boldsymbol{\xi})$ 是流形 M_2 在点 Q_0 按照定义 1 的意义的切向量. 则对流形 M_2 上的任何光滑函数 g，下列关系式被满足

$$\boldsymbol{\eta}(g)=\boldsymbol{\xi}(g\circ f). \tag{3.26}$$

关系式(3.26)的验证在任何坐标系中进行就可以了. (3.26)的右边不依赖于局部坐标系的选择. 由此知道左边部分也不依赖于局部坐标系的选择.

引理 2 如果 $\gamma=\gamma(t)$ 是流形 M_1 上通过 P_0，$\gamma(t_0)=P_0$ 的曲线，$\boldsymbol{\xi}$ 是曲线 γ 在 P_0 点的切向量，在映射 $f:M_1\to M_2$ 时，$\boldsymbol{\eta}=df_{P_0}(\boldsymbol{\xi})$ 是曲线 γ 的像 $f(\gamma(t))$ 的切向量.

此引理可在流形 M_1 和 M_2 的某个局部坐标系中直接验证.

例 1 把光滑函数 $y=f(x)$ 看作流形间的光滑映射 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$. 于是按照定义 1，微分就是由 $T_x(\mathbf{R}^1)=\mathbf{R}^1$ 到 $T_{f(x)}(\mathbf{R}^1)=\mathbf{R}^1$ 的线性映射，即 $\eta=f'(x)\xi$. 在数学分析中，函数 $f(x)$ 的微分理解为函数 f 增量的线性部分，它是两个独立变量(x 和 dx)的函数：$dy=f'(x)dx$. 因此，令 $dx=\xi$，$dy=\eta$，我们得到概念是一致的.

例2 考察n个独立变量的光滑函数$y=f(x^1,\cdots,x^n)$. 与一个变量的函数一样,把它表示为流形的光滑映射$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$. 于是映射$f$的微分是切空间的线性映射$df_{P_0}:T_{P_0}(\mathbf{R}^n)=\mathbf{R}^n\to T_{Q_0}(\mathbf{R}^1)=\mathbf{R}^1$,这里$P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$,$Q_0=f(x_0^1,\cdots,x_0^n)$. 微分$df_{P_0}$在局部坐标中由公式$\eta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\xi^k$给出. 另一方面,函数$f$的微分是函数$f$的增量的线性部分,它是两组独立变量$(x^1,\cdots,x^n)$和$(dx^1,\cdots,dx^n)$的函数:

$$dy=df(x^1,\cdots,x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1,\cdots,x^n)dx^k.$$

令$\xi^k=dx^k,\eta=dy$,我们得到函数的微分与它作为流形的映射的微分这两个概念是一致的. 此外,微分df_{P_0}的矩阵是映射f的Jacobi矩阵,而从另一方面也是函数f的梯度grad$f$;这样,f的梯度就是在规定的坐标系中微分的矩阵df_{P_0}. 很清楚,在坐标变换时函数f的梯度的分量也将改变.

例3 考察光滑函数$f=f(x^1,\cdots,x^n)$,并设$P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$是函数f的极值点,于是分析中一个定理说,这时grad $f_{P_0}=0$. 在我们的术语中,这就是说,$df_{P_0}=0$. 这个结论推广到任意流形的情形:*若在点$P_0\in M$光滑函数f达到局部极大值,则$df_{P_0}=0$.*

这种情况在流形的理论中得到新的阐明. 在欧氏空间的区域中,总是存在这样的光滑函数,使其梯度在每一点不为0,grad$f\neq0$. 而对光滑流形来说已不是这样. 例如,在二维球面S^2上,对所有的光滑函数f来说,其微分df至少在两点为0:函数f的极大值点和极小值点. 一般来说,*若M是紧致光滑流形,那么对所有的光滑函数f,使微分df等于0的点不少于两点.* 图3.15表示在二维球S^2上的"高度"函数微分的性状. 而图3.16是在环面T^2上的"高度"函数.

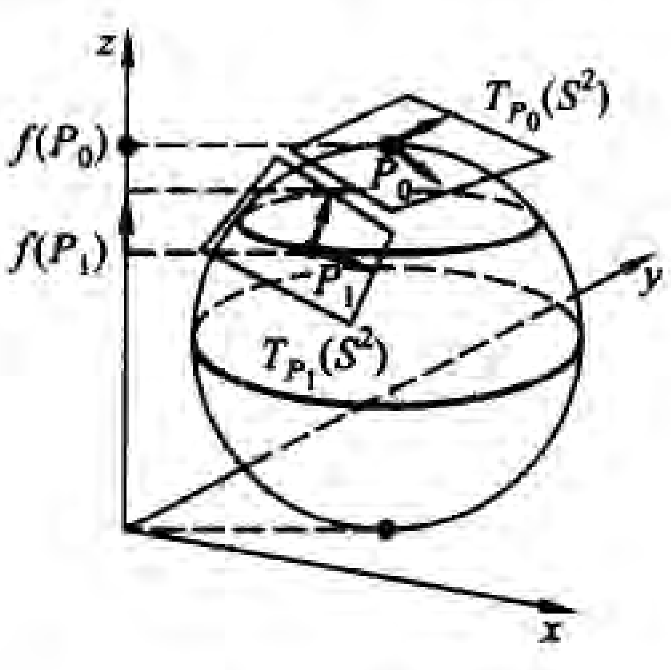


图3.15

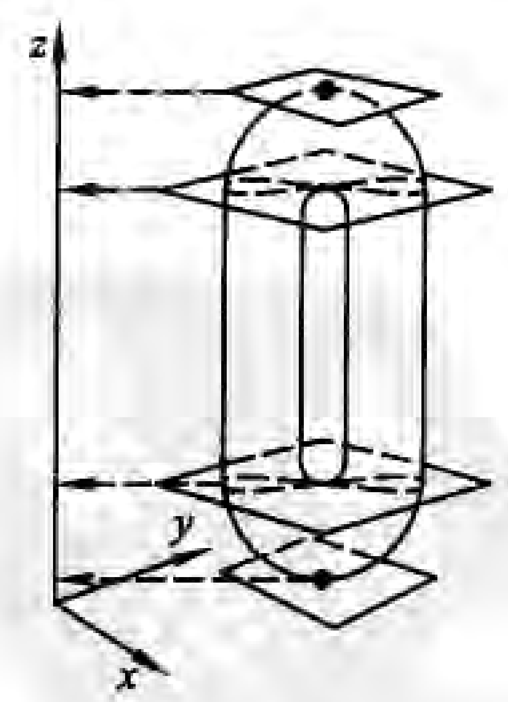


图3.16

例4 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$是线性映射,这个映射用坐标可写为矩阵的形式

$$Y=AX,$$

$$Y=\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

那么,很明显,映射 f 的 Jacobi 矩阵(也就是微分 df_{P_0})就是矩阵 A. 换句话说,$df_{P_0}(\xi)=f(\xi)$. 其实这是不奇怪的. 若把微分 df_{P_0} 也想像为在许多自变量情况下映射增量的线性部分,那么,得到 $\Delta Y=A(X+\Delta X)-AX=A\Delta X$. 于是,增量 ΔY 本身恒等地与其线性部分一致. 于是线性映射的微分不依赖于点 $P_0\in\mathbf{R}^n$.

3.4.2 映射的局部性质和微分

定义 2 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑映射. 若映射的微分 $df_{P_0}:T_{P_0}(M_1)\to T_{Q_0}(M_2)$,$Q_0=f(P_0)$,是满同态①,即映射到整个空间 $T_{Q_0}(M_2)$ 上. 则称点 $P_0\in M_1$ 是**映射 f 的正则点**. 若原像 $f^{-1}(Q_0)$ 中所有的点 P_0 都是映射 f 的正则点时,则称 $Q_0\in M_2$ 为**映射 f 的正则点**.

下面的定理是 3.2 中定理 2 的推广.

定理 1 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑流形的光滑映射,$Q_0\in M_2$ 是映射 f 的正则点. 则原像 $M_3=f^{-1}(Q_0)$ 是光滑流形,$\dim M_3=\dim M_1-\dim M_2$. 此外,可以取 M_1 上的某些局部坐标作为流形 M_3 的局部坐标.

证明 为证明 M_3 是流形,在每一点 $P_0\in M_3$ 的邻域中应用 3.2 的定理 2 即可. 我们得到,每一点 $P_0\in M_3$ 容许有邻域 $U\ni P_0$ 同胚于欧氏空间 $\mathbf{R}^{n-m}$ 的区域,这里 $n=\dim M_1$,$m=\dim M_2$. 此外,可以取流形 M_1 在点 P_0 的邻域的局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中的某 $(n-m)$ 个坐标作为邻域 U 中的局部坐标. 若这些坐标是 $(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})$,那么其它的坐标 (x^i) 在 M_3 上可表示为 $(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})$ 的光滑函数. 由此得到 M_3 是光滑流形. 实际上,设 $(y^1,\cdots,y^n)$ 是流形 M_1 上的另外的坐标系,$(y^{j_1},\cdots,y^{j_{n-m}})$ 构成 M_3 上的局部坐标系. 则

$$\begin{aligned} y^{j_k} &= y^{j_k}(x^1,\cdots,x^n) \\ &= y^{j_k}(x^1(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}}),\cdots,x^n(x^{i_1},\cdots,x^{i_{n-m}})) \end{aligned}$$

是光滑函数. 定理证毕.

定义 3 设 $f:M_1\to M_2$ 是光滑映射. 若在每一点 $P\in M_1$,微分 $df_P:T_P(M_1)\to T_{f(P)}(M_2)$ 是态同胚②,即是到自己的像的双方单值的映射,则称映射 f 为**浸入**. 此外,如果映射 f 双方单值地映射 M_1 到它自己的像 $f(M_1)$ 上,并且 $f(M_1)$ 是闭集③,

---

① 原文为 Эпиморфизм——译注.

② 原文为 мономорфизм——译注.

③ 有的书中无 $f(M_1)$ 是闭集的条件,而有此条件时则称为正则子流形,这里的子流形即正则子流形——译注.

则映射f称为是**嵌入**. 这时像$f(M_1)$(就如同M_1一样)称为流形M_2的**子流形**.

例 5　根据定理 1,映射$f:M_1\to M_2$的正则点的原像是子流形. 实际上,可以取外围流形M_1的某些局部坐标作为M_3的局部坐标系,那么在局部坐标中,恒等映射$\varphi: M_3\to M_1$为

$$\begin{aligned}
&x^1=x^1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&x^{n-m}=x^{n-m}\\
&x^{n-m+1}=x^{n-m+1}(x^1,\cdots,x^{n-m}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x^n=x^n(x^1,\cdots,x^{n-m}).
\end{aligned}$$

所以 Jacobi 矩阵$d\varphi$中包含了单位方阵块. 于是 rank $d\varphi=n-m$,即$d\varphi$是态同胚.

例 6　考察映射$f:S^1\to\mathbf{R}^2$,它由公式$f(\varphi)=\{\cos\varphi,\sin 2\varphi\}$给出. 速度向量等于$\frac{df}{d\varphi}=\{-\sin\varphi,2\cos 2\varphi\}$,并且在任何点不等于 0,即 Jacobi 矩阵的秩等于 1. 所以f是浸入(参看图 3.17). 图 3.17 中描绘的曲线是双叶玫瑰图的一种,并且可能于示波器上在垂直和水平扫描正弦曲线的信号时得到.

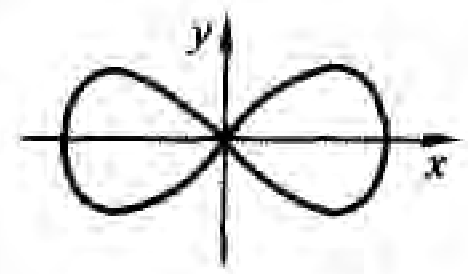


图 3.17

3.4.3　流形在欧氏空间的嵌入

我们在本段中介绍惠特尼(H. Whitney)定理:任何紧致流形都可看作足够大维数的欧氏空间的子流形.

定理 2(惠特尼弱性定理)　设M是光滑紧致流形. 则存在嵌入$\varphi: N\to\mathbf{R}^N$,$N$为适当选择的维数.

证明　设$\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{L}$是有限图册. $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$是图$U_\alpha$中的局部坐标系. 不失一般性,可以认为图$U_\alpha$同胚于半径为 1 的球$D^n\subset\mathbf{R}^n$,而且,坐标$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$实现了图$U_\alpha$到球$D^n$的同胚$\varphi_\alpha$. 其次,可以认为球$D^n$在$\mathbf{R}^n$中,并且不包含坐标原点. 借助于$\mathbf{R}^n$中的平行移动,这是可以做到的. 进一步,设$D_1^n\subset D^n$是与球$D^n$有同一球心,而半径小于$D^n$的球,而且,开集$U'_\alpha=\varphi_\alpha^{-1}(D_1^n)\subset U_\alpha$覆盖了流形$M$. 设$f$是$\mathbf{R}^n$上的光滑函数,在$D_1^n$上恒等于 1,并且 supp $f\subset D^n$. 设

$$y_\alpha^k(P)=\begin{cases}f(\varphi_\alpha(P))x_\alpha^k(P), & P\in U_\alpha,\\ 0, & P\notin U_\alpha.\end{cases}$$

显然,$P\in U'_\alpha$时,$y_\alpha^k(P)=x_\alpha^k(P)$. 我们得到光滑函数组$\{y_\alpha(P)\}$,共有$N=nL$个函数. 这组函数共同实现了流形$M$到欧氏空间$\mathbf{R}^N$的映射$g:g(P)=\{y_\alpha^k(P)\}\in\mathbf{R}^N$.

我们来证明,映射g的微分的秩,在每一点都为n. 设$P\in M$是任意一点,

$U'_\alpha \ni P,(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$是局部坐标系. 映射 g 在 P 点的 Jacobi 矩阵,在局部坐标系 $\{x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n\}$ 中由偏导数$\{\partial y_\beta^k(P)/\partial x_\alpha^j\}$组成. 特别,若 $\beta=\alpha$,则有

$$\frac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P)=\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j}(P)=\sigma_j^k,$$

即 g 的 Jacobi 矩阵含有 n 阶单位矩阵块,于是 rank $dg=n$.

于是映射 g 是浸入. 为使映射 g 为嵌入,必须使不同的点 P 和 Q 变为不同的点 $g(P)$和 $g(Q)$.

作新的映射

$$\bar{g}(P)=\{y_\alpha^k(P),f(\varphi_\alpha(P))\}\in\mathbf{R}^{N+L}.$$

它与 g 一样,是浸入. 现设 P 和 $Q,P\neq Q$,是流形上两点. 考察使$f(\varphi_\alpha(P))=1$ 的数 α,若$f(\varphi_\alpha(Q))<1$,则 $\bar{g}(P)\neq\bar{g}(Q)$;若 $f(\varphi_\alpha(Q))=1$,则 $y_\alpha^k(P)=x_\alpha^k(P)$, $y_\alpha^k(Q)=x_\alpha^k(Q)$,这就是说对某个 k,坐标$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$中有 $x_\alpha^k(P)\neq x_\alpha^k(Q)$,即 $\bar{g}(P)\neq\bar{g}(Q)$. 于是映射 $\bar{g}: M\to\mathbf{R}^{N+L}$是互相单值的浸入,即嵌入. 定理证毕.

于是,任何光滑流形 M 都可看作欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 中作为子流形的嵌入,此欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 有足够大的维数 N. 实际上,欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 的维数本质上可以降低. 例如, $\mathbf{R}^{n+1}$中的球面 S^n,$\mathbf{R}^{2n}$中的环 T^n. 射影平面 RP^2 不能装入 $\mathbf{R}^3$ 中,但能嵌入到 $\mathbf{R}^5$ 中. 事实上,设$(x_1:x_2:x_3)$是点 P 在 RP^2 中的齐次坐标. 设

$$y^1=\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},y^2=\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},y^3=\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$y^4=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},y^5=\frac{x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},y^6=\frac{x_3x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

得到映射

$$g: RP^2\to\mathbf{R}^6,g(P)=g(x_1:x_2:x_3)=(y^1,y^2,y^3,y^4,y^5,y^6).$$

实际上,映射 g 的像在由方程 $y^1+y^2+y^3=1$ 给出的线性子空间 $\mathbf{R}^5\subset\mathbf{R}^6$ 中.

3.4.4 流形上的黎曼度量

现在,可以给出流形上的黎曼度量的一般概念,它的特殊情况,在前面已考察过.

在光滑流形 M 的每一个切空间 $T_P(M)$中,给定的正定数量积族叫做黎曼度量. 若在固定点 P 的邻域 U 的坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中,则在 $T_P(M)$中也给出坐标$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$. 在坐标系$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$中,数量积由非退化的度量矩阵 $G=(g_{ij})$所确定,它依赖于点. 在变为新的坐标系$(y^1,\cdots,y^n)$时,矩阵按规则

$$g'_{ij}(P)=\sum_{\alpha,\beta=1}^n g_{\alpha\beta}(P)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}(P)\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}(P)$$

变化，这里 $G'=(g'_{ij}(P))$ 是在新的坐标系 $(y^1,\cdots,y^n)$ 中的数量积矩阵.

定义 4 光滑流形 M 的每一点 P 的切空间 $T_P(M)$ 中一非退化的正定数量积族，并且数量积矩阵在局部坐标系中是局部坐标的光滑函数，则称此数量积为**光滑流形 M 的黎曼度量**.

度量可以作为对应给出，对图 U_α 的每一个坐标系 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$，对应于图 U_α 中的矩阵值的光滑函数 $G^\alpha(P)=(g_{ij}^\alpha(P))$，满足：

1° 矩阵 $G^\alpha(P)$ 是对称的和正定的；

2° 系数 $g_{ij}^\alpha(P)$ 按下面的规则变换

$$G_{ij}^\alpha(P)=\sum_{k,l=1}^n g_{kl}^\beta(P)\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i}(P)\frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^j}(P). \tag{3.27}$$

这里，$P\in U_\alpha\cap U_\beta$. 若 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^n)$，$\boldsymbol{\eta}=(\eta_\alpha^1,\cdots,\eta_\alpha^n)$ 是两个切向量，那么，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 的数量积表示为

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^\alpha(P)\xi_\alpha^i\eta_\alpha^j.$$

下面，我们在流形上引进一般的黎曼度量的结构.

设 $f:M_1\to M_2$ 是流形 M_1 到流形 M_2 的光滑的嵌入，$\dim M_1=m$，$\dim M_2=n$. 在流形 M_2 上定义了黎曼度量，此黎曼度量在图册 $\{U_\alpha\}$ 中由一套矩阵函数 $\{G^\alpha(P)=(G_{ij}^\alpha(P))\}$ 给出.

于是，嵌入 f 在子流形 M_1 上给出了由包围流形 M_2 的黎曼度量所产生的黎曼度量. 实际上，不失一般性，可以认为子流形 M_1 的图册 $\{V_\alpha\}$ 由交

$$V_\alpha=M_1\cap U_\alpha$$

给出，而在图 V_α 的局部坐标为 $\{y_\alpha^i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$. 在 V_α 和 U_α 中，嵌入 f 由一组公式

$$x_\alpha^i=x_\alpha^i(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^m)$$

给出. 这个映射的 Jacobi 矩阵有最大的秩

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial y_\alpha^j}\right)=m=\dim M_1.$$

流形 M_1 的度量由如下度量矩阵给出

$$(h_{ij}^\alpha(P))_{1\leqslant i,j\leqslant m},P\in V_\alpha,$$

其中

$$h_{ij}^\alpha(P)=g_{kl}^\alpha(P)\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j}. \tag{3.28}$$

命题 1 (3.28)给出了流形 M_1 的黎曼度量.

证明 度量 $H^\alpha(P)$ 的对称性和正定性由(3.28)的代数性质得出. 现在只要验证满足变换规则(3.27)即可. 由(3.28)，有

$$h_{ij}^\alpha(P)=g_{kl}^\alpha(P)\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j}=g_{st}^\beta(P)\frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_\alpha^k}\frac{\partial x_\beta^t}{\partial x_\alpha^l}\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j}$$

$$= g^{\beta}_{st}(P)\frac{\partial x^s_{\beta}}{\partial y^i_{\alpha}}\frac{\partial x^t_{\beta}}{\partial y^j_{\alpha}} = g^{\beta}_{st}(P)\frac{\partial x^s_{\beta}}{\partial y^p_{\beta}}\frac{\partial x^t_{\beta}}{\partial y^q_{\beta}}\frac{\partial y^p_{\beta}}{\partial y^i_{\alpha}}\frac{\partial y^q_{\beta}}{\partial y^j_{\alpha}}$$

$$= h^{\beta}_{pq}(P)\frac{\partial y^p_{\beta}}{\partial y^i_{\alpha}}\frac{\partial y^q_{\beta}}{\partial y^j_{\alpha}}.$$

因此,变换规律(3.27)得到满足.

推论 1 在任何紧致流形上存在黎曼度量.

证明 我们提醒一下,由命题 1 知,若在外围流形 M_2 上定义了黎曼度量,那么在其子流形 M_1 上也就有了黎曼度量.

由惠特尼定理,问题归结为在欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 上构造黎曼度量. 由于 $\mathbf{R}^N$ 被一个图所覆盖,所以只要一个函数 $G(P)$, $P\in\mathbf{R}^N$ 就可以了. 可以取 $G(P)\equiv E$, E 是单位矩阵作为这个函数. 因此,即使在 $\mathbf{R}^N$ 上有一个黎曼度量,那么在任何紧致流形上同样存在黎曼度量. 推论证毕.

习 题

1. 作出环 T^n 到 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的嵌入.

提示 环 T^n 是由 T^{n-1} 关于轴旋转的超曲面.

2. 作出 $S^2\times T^2$ 在 $\mathbf{R}^5$ 中的嵌入.

提示 在 $\mathbf{R}^5$ 中找出同胚于 $S^2\times\mathbf{R}^3$ 的开区域.

3.4.5 Sard 定理

在上一段中,我们表明了,如何根据微分的性质推出光滑映射的局部性质. 相反,在某些情况下,可能根据映射本身的性质推出微分的性质. 例如,若 $f:M_1\to M_2$ 是光滑同胚,则如 3.3 的引理 2 中已经表明的,微分 $df:T_P(M_1)\to T_{f(P)}(M_2)$ 是同构. 现在,我们考察在某种意义下是定理 1 中所解决的相反的问题. 设 $f:M_1\to M_2$ 是流形 M_1 到整个流形 M_2 上的光滑映射,即 $f(M_1)=M_2$,这样的映射可认为是类似于线性映射的满同态. 那么,可以提出问题:微分 $df:T_P(M_1)\to T_{f(P)}(M_2)$ 是满同态吗? 可惜,不是这样. 细看下面的例子. 设 $M_1=M_2=\mathbf{R}^1$, $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$, $f(x)=x^3$, $x\in\mathbf{R}^1$. 则 f 是光滑映射,并且 $f(\mathbf{R}^1)=\mathbf{R}^1$. 但是,在点 $x=0$,微分 $df=0$,这就是说不是满同态. 而在其他一些点,微分 $df=3x^2dx$ 是满同态. 从考察的例子中,可以预料到所提问题的一般答案. 我们把它叙述为下面的结论.

定理 3(Sard) 设 $f:M_1\to M_2$ 是紧致流形间的光滑映射. 于是,映射 f 的正则点 $Q\in M_2$ 的集合 G 是处处稠密的开集.

在证明定理 3 之前,考察几个例子.

例 7 设 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$, $f(x)=a=$ 常数. 在此情形下,微分 df 在任何一点都不是满同态. 但是,像 $f(\mathbf{R}^1)$ 由一点 a 组成,就是说,按照定义,所有的点 $y\neq a$ 都是正则点(因为 $f^{-1}(y)=\varnothing$). 于是正则点的集合是处处稠密的开集.

例 8　设 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 是有限的光滑函数. 设 $F=\{x:f'(x)=0\}$. 集合 F 是闭集. 像 $f(F)$ 是紧致集合,并且是由所有的非正则点组成. 我们证明 $f(F)$ 无处稠密. 若这不对,那么具有内点 $y\in f(F)$,即点 y 和它的某邻域一起在 $f(F)$ 中,$y\in U\subset f(F)$. 因为 f 是有限的函数,所以像 $f(F)$ 在某个区间的像 $f([a,b])$ 中. 换句话说,证明当 $F'=F\cap[a,b]$ 时,$f(F')$ 无处稠密就足够了. 设 $V\supset F'$ 是集合 F' 的某个邻域,$V\subset(-2a,2a)$. 于是 $f(V)$ 包含了邻域 U. 就是说,可以找到点 $x\in V$,使 $f'(x)$ 的绝对值大于 $\varepsilon=\mathrm{diam}\ U/4a$①. 缩小邻域 V,得到点列 $x_n\in F'$. 不失一般性,可以认为 $x_n\to x_0\in F'$. 此时 $f'(x_n)\to f'(x_0)$,即 $|f'(x_0)|\geqslant\varepsilon$,这与下列条件矛盾:在点 $x_0\in F'\subset F$,$f'(x_0)=0$.

用更一般的方式叙述定理 3 更为方便:若 $F\subset M_1$ 是紧致集,由非正则点组成,则集合 $f(F)$ 无处稠密. 我们指出,只要当 M_1 是欧氏空间的闭圆盘邻域时证明定理 3 就可以了. 实际上,用有限图册 U_α 覆盖 M_1 并取 $V_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$,使 V_α 同胚于欧氏空间的圆盘. 设 $G_\alpha\subset M_2$ 是映射 f 在 $\overline{V}_\alpha$ 上的正则点的集合. 则交 $G=\cap G_\alpha$ 是整个映射 f 的正则点的集合. 若 G_α 是处处稠密的开集,则 G 也是处处稠密的开集. 我们选取较细的图册 U_α,使像 $f(U_\alpha)$ 在流形 M_2 的一个图 W_β 中. 那么对映射 $f|U_\alpha:U_\alpha\to W_\beta$ 在 $\overline{V}_\alpha$ 上的正则点证明定理 1 即可.

实际上,若 $G\subset W_\beta$ 是映射 $f|U_\alpha$ 的正则点的集合,则 $G\cup(M_2\setminus f(\overline{V}_\alpha))$ 是映射 $f:U_\alpha\to M_2$ 在 $\overline{V}_\alpha$ 上的正则点的集合. 于是,设 U 是圆盘 D^n 在 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域,$f:U\to\mathbf{R}^m$ 是光滑映射. 我们证明,当 $D^n\cap f^{-1}(y)$ 由正则点组成时,点 $y\in\mathbf{R}^m$ 的集合是处处稠密的开集.

引理 3　定理对 $m=1$ 时是正确的.

证明　设 $F\subset D^n$ 是函数 f 的非正则点的集合. 于是 $f(F)$ 是紧致的,并且包含了函数 f 的所有的非正则点. 我们证明 $\mathbf{R}^1\setminus f(F)$ 处处稠密. 若不是这样,则可以找到区间 $V\subset f(F)$. 固定 $k>n$,并考察使函数 f 到 k 阶(包括 k 阶)的所有偏导数等于 0 的点集 F_k. 那么,在任意点 $y\in F_k$ 的邻域中把函数 f 按泰勒公式展开,得到估计式 $|f(y)-f(x)|<C|x-y|^k$,而且常数 C 不依赖于点 $y\in F_k$ 和 $x\in D^n$ 的选择. 这就是说,如果用边为 $1/N$ 的立方体覆盖集合 F_k(这些立方体的个数不超过 N^n),那么像 $f(F_k)$ 被一些区间覆盖,而且每一个区间的长度不超过数 $2(\sqrt{n})C/N^k$. 于是,所有这些区间长的和不超过 $2(\sqrt{n})C/N^{k-n}$,并且当 $N\to\infty$ 时,趋于 0. 这就是说,集合 $f(F_k)$ 无处稠密.

集合 F 的剩余部分,即 $F\setminus F_k$ 可表示为有限个子集系的并,子集系中的每一个子集都在由下列方程

---

① diam 是 diameter(直径)的缩写——译注.

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}=0, l_1+l_2+\cdots+l_n=l<k$$

之一所给出的子流形中. 事实上,设 $F_{l_1\cdots l_n}$是 F 中使

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_n}\cdots\partial x_n^{l_n}}=0, \mathrm{grad}\,\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_n}\cdots\partial x_n^{l_n}}\neq 0 \tag{3.29}$$

成立的点的集合. 很明显,$F\setminus F_k=\bigcup_{l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1\cdots l_n}$. 另一方面,集合 $F_{l_1\cdots l_n}$在满足条件(3.29)的点组成的子流形 $M_{l_1\cdots l_n}$上,子流形 $M_{l_1\cdots l_n}$的维数小于 n. 所以在应用归纳法时,可以认为引理 2 对 $M_{l_1\cdots l_n}$成立. 于是,集合$f(F_k)$不覆盖区间 V,就是说可以找到邻域 $U_k\supset F_k$,使$\overline{f(U_k)}$不覆盖区间 V. 设 $l_1+\cdots+l_n=k-1$. 于是 $F_{l_1\cdots l_n}\setminus U_k$ 在流形 $M_{l_1\cdots l_n}$中是紧致集合,并且所以$f(F_{l_1\cdots l_n}\setminus U_k)$不覆盖 $V\setminus f(U_k)$,即$f(F_k\cup F_{l_1\cdots l_n})$不覆盖 V. 于是,有这样的邻域 $U_s\supset F_k\cup\bigcup_{s<l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1\cdots l_n}$,使$\overline{f(U_s)}$不覆盖区间 V. 所以集合 $F_{l_1\cdots l_n}\setminus U_s$ 当 $l_1+\cdots+l_n=s$ 时,在映射f下也不覆盖差集 $V\setminus f(F_k\cup\bigcup_{s<l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1\cdots l_n})$. 就是说,$f(F_k\cup\bigcup_{s\leqslant l_1+\cdots+l_n<k}F_{l_1\cdots l_n})$不覆盖区间 V. 在有限的步骤内,我们得到$f(F)$不覆盖 V. 引理证毕.

应用引理 2 对 m 用归纳法来证明对函数组$f:U\to\mathbf{R}^m, D^n\subset U, f(P)=(f^1(P),\cdots,f^m(P))$情况下的定理 3,因为$f^1$是光滑函数,所以根据引理 2,函数$f^1$的正则值的集合 G_1 是开集,并且在 $\mathbf{R}^1$ 中处处稠密. 设$y_0^1\in G_1, N=(f^1)^{-1}(y_0^1)$. 根据定理 1,集合 N 是光滑子流形,它在映射f下映射到超平面 $\mathbf{R}^{m-1}$中. 那么,当且仅当点$(y_0^1,\cdots,y_0^n)$是映射f的正则点时,点$(y_0^2,\cdots,y_0^n)$是映射$f|_N$的正则点. 根据归纳法的假设,关于映射$f|_N$是正则的点$(y_0^2,\cdots,y_0^n)$的集合在 $\mathbf{R}^{m-1}$中处处稠密,于是,关于映射f的正则点的集合在 $\mathbf{R}^m$中也是处处稠密的. 为证明正则点的集合是开集,我们只需指出正则点的原像 $D^n\cap f^{-1}(y_0^1,\cdots,y_0^n)$是紧致的,并且在其每一点,映射$f$微分的矩阵的某个子式不等于 0. 因此,对任何充分近的点$(y_1^1,\cdots,y_1^n)$,原像 $D^n\cap f^{-1}(y_1^1,\cdots,y_1^n)$在集合 $D^n\cap f^{-1}(y_0^1,\cdots,y_0^n)$的充分小的邻域中,即所指的那个子式不等于 0. 这也就是说,映射f的正则点的集合是开集. 定理 3 证毕.

我们考察光滑映射$f:M_1\to M_2$, $\dim M_1<\dim M_2$,作为 Sard 定理的应用. 这时任何点 $P\in M_1$ 都不可能是正则点. 这就意味着像$f(M_1)$在 M_2 中无处稠密. 特别,映射f的像不覆盖流形 M_2.

注 Sard 定理可推广到非紧致可分离流形. 但这时正则点的集合不必须是开集,而仅仅是可数个处处稠密的开集的交. 这样的集合称为 G_δ-集合. 由一般拓扑学知道,可数个在 $\mathbf{R}^n$ 中处处稠密的开集的交总不是空集,并且是处处稠密的. 因此,对非紧致流形正则点的集合不是空集,并且是处处稠密的.

第四章　光滑流形(例)

4.1　平面曲线论和三维空间中的曲线论

4.1.1　平面曲线论　Frenet 公式

我们考虑平面上的笛卡儿坐标(x,y). 光滑平面曲线$\gamma(t)$由坐标原点O发出向径

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$$

给出. 提醒一下,具有坐标$\left(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt}\right)$的向量称为曲线$\gamma(t)$在$t$点的**速度向量** $\boldsymbol{v}(t)$. 由这个向量确定的直线称为曲线在点$\gamma(t)$的**切线**. 通常,我们假定$\boldsymbol{v}(t)\neq\mathbf{0}$. 注意,在速度向量为$\mathbf{0}$的那些点,光滑曲线可能受折损,我们将考察正则曲线,即速度向量不为零的曲线. 向径的导数有时用点或撇表示. 用$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|=|\boldsymbol{v}(t)|$表示速度向量的模(在欧氏度量下). 设$s$表示曲线上某个固定点到变点的曲线弧长;由于点沿曲线在一个方向上运动时弧长单调增加,沿着曲线可以取弧长为参数. 这个参数称为**自然参数**. 写成依赖于参数s的向量函数形式的曲线方程$\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s))$称为曲线的**自然参数化**.

引理 1　写成自然参数的曲线,其速度向量的模是常数并且等于 1.

证明　断言由弧长l的微分公式得出,即$dl=dt\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|$. 引理证毕.

注意,在正则光滑曲线的每一点,速度向量$\boldsymbol{v}(s)$不为$\mathbf{0}$.

还有,在曲线的每一点,还可以给出一个向量,即曲线的加速度向量:$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}$. 并且,加速度向量(关于自然参数)垂直于速度向量.

引理 2 设给出向量函数 $\boldsymbol{p}(t)$, $|\boldsymbol{p}(t)|\equiv 1$. 那么向量 $\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{p}(t)$.

证明 微分恒等式 $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\equiv 1$,得到

$$\left\langle\frac{d\boldsymbol{p}}{dt},\boldsymbol{p}\right\rangle\equiv 0.$$

引理证毕.

于是,取自然参数的光滑曲线 $\gamma(s)$ 的每一点,自然地有两个互相垂直的向量,一个是速度向量,另一个是加速度向量. 加速度向量不一定为单位向量. 假设加速度向量不为 0,并且考察单位向量

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}\right|,$$

即"归范加速度". 因此,得到沿曲线的光滑标架簇:$(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{n}(s))$,称为 Frenet **标架**或 Frenet **基**. 向量 $\boldsymbol{n}(s)$ 称为曲线在点 s 的**法向量**. 每一个 Frenet 标架平行移动到坐标原点 O 以后,唯一地确定了平面绕 O 点的某个旋转;于是沿曲线的标架场确定了 $\gamma(s)$ 到正交矩阵群的某个光滑映射,即到平面旋转群的光滑映射. 在下面我们就要在多维情况下研究这个映射的性质.

定义 1 设光滑曲线取自然参数,量 $k(s)=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\right|$(即加速度的模)称为曲线在点 s 的**曲率**.

按照定义,立即有

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}=k(s)\boldsymbol{n}(s),$$

这里 $\boldsymbol{n}(s)$ 是曲线在点 s 的法向量.

定义 2 数 $R(s)=1/k(s)$ 称为光滑曲线在点 s 的**曲率半径**.

我们考察一些简单例子,平面上的直线是线性向量函数

$$x(s)=x(0)+\alpha\cdot s;y(s)=y(0)+\beta\cdot s,$$

s 是自然参数. 这里,数 α,β 应满足等式 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$,因为 $\boldsymbol{v}=(\alpha,\beta)$, $|\boldsymbol{v}(s)|\equiv 1$. 这时,加速度向量 $\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}$ 恒等于 0,从而直线的曲率也等于 0. 相应地,直线的曲率半径等于无穷大.

我们考察平面上半径为 R 的圆周,圆周的参数方程为

$$x(s)=x(0)+R\cos\left(\frac{s}{R}\right),y(s)=y(0)+R\sin\left(\frac{s}{R}\right).$$

直接计算得到圆周的曲率是常数,并且等于 $1/R$,而曲率半径等于 $1/k=R$.

但是在许多问题中,曲线的方程不是用自然参数表示而是以某个任意参数 t 表示的,因此会计算用任意参数表示的曲线的曲率是有益的.

定理 1 设光滑曲线 $\gamma(t)$ 以 t 为参数(不一定是自然参数). 速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 在点 t 不等于 $\mathbf{0}$. 则有如下的公式

$$k(s)=\frac{|x''y'-y''x'|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}},$$

其中 $x',x'',\cdots$ 表示关于参数 t 的导数.

证明 设 $\gamma(t)$ 的参数表示为 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$,速度向量 $\boldsymbol{v}(t)=(x'(t),y'(t))$;若 s 是自然参数,则对任意向量函数 $\boldsymbol{q}(t)$ 有

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{q}(t)=\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}.$$

由曲率的定义得到

$$k=\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}\right)\right|,$$

而

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}\right)=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}\right),$$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|}=\frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}.$$

由此,得

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{|\boldsymbol{v}(t)|}\cdot\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{v}(t)|}\right)\right|\\&=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^2}\cdot\left|\left(\boldsymbol{r}''-\frac{\boldsymbol{r}'}{2|\boldsymbol{r}'|^2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}'|^2\right)\right|.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}'|^2=2\langle\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''\rangle,$$

所以

$$k=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^2}\left|\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}'\cdot\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')}{|\boldsymbol{r}'|^2}\right|.$$

更详细地,有

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^2}\left(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}'\cdot\frac{\langle\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''\rangle}{|\boldsymbol{r}'|^2}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^2}\left(\frac{x''(y')^2-x'y'y''}{(x')^2+(y')^2}\right)\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^2}\left(\frac{y''(x')^2-y'x'x''}{(x')^2+(y')^2}\right)\boldsymbol{e}_2$$

由此,得

$$k=\frac{|x''y'-y''x'|}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}.$$

定理证毕.

我们再来证明 Frenet 标架向量的导数满足简单的关系式，即所谓"Frenet 公式".

定理 2（Frenet 公式） 若光滑曲线用自然参数表示，则下列等式成立

$$\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}=k(s)\boldsymbol{n}(s),\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-k(s)\boldsymbol{v}(s).$$

证明 Frenet 公式的第一式直接由曲率 $k(s)$ 的定义得到. 由定义知 $(\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{n}(s))=1$. 由引理 2，有

$$\left\langle \boldsymbol{n}(s),\frac{d}{ds}\boldsymbol{n}(s)\right\rangle=0,\text{即}\frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds}=\lambda(s)\boldsymbol{v}(s),$$

其中 $\lambda(s)$ 是 s 的某个光滑函数. 我们来求这个函数. 将恒等式 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})=0$ 对 s 求微分，得到

$$\left\langle\frac{d\boldsymbol{v}}{ds},\boldsymbol{n}\right\rangle+\left\langle\boldsymbol{v},\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right\rangle=0,$$

由此，$k\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle+\langle\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}\rangle=0$，即 $k=-\lambda$. 定理证毕.

Frenet 公式取以下的形式

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\boldsymbol{v}}{ds}\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}.$$

此关系式有清楚的几何意义. 考察 s 点的标架 $\omega(s)=(\boldsymbol{v}(s),\boldsymbol{n}(s))$，它沿曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 从点 s 变位到无限邻近的点 $s+\Delta s$（图 4.1）. 将标架 $\omega(s+\Delta s)$ 平行移动到点 s，在点 s 得到两个标架：$\omega(s)$ 和 $\omega(s+\Delta s)$，而且 $\omega(s+\Delta s)$ 由标架 $\omega(s)$ 转动无限小的角 $\Delta\varphi$ 而得到. 于是标架 $\omega(s)$，$\omega(s+\Delta s)$ 由正交变换 $\omega(s+\Delta s)=A(\Delta s)\omega(s)$ 相联系，其中 $A(\Delta s)=\begin{pmatrix}\cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi\\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\end{pmatrix}$. 把函数 $\cos\Delta\varphi$，$\sin\Delta\varphi$ 展开成关于小增量 $\Delta\varphi$ 的级数，并略去 $\Delta\varphi$ 的二阶小量以上的项，得到

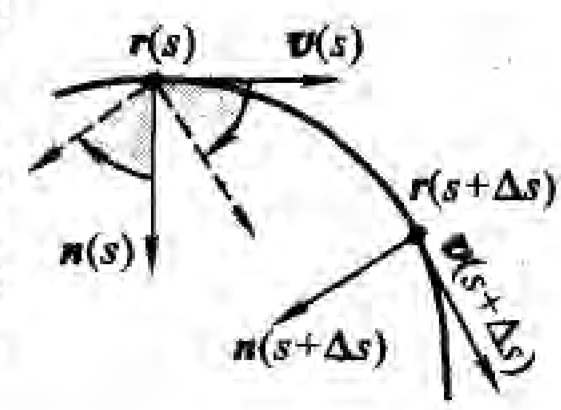


图 4.1

$$A(\Delta\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \Delta\varphi\\ -\Delta\varphi & 0\end{pmatrix}+\cdots,$$

即

$$\omega(s+\Delta s)=\omega(s)+\begin{pmatrix}0 & \Delta\varphi\\ -\Delta\varphi & 0\end{pmatrix}\omega(s)+\cdots,$$

由此

$$\frac{d}{ds}\omega(s)=\begin{pmatrix}0 & \frac{d\varphi(s)}{ds}\\ -\frac{d\varphi(s)}{ds} & 0\end{pmatrix}\omega(s),$$

这里 $\varphi(s)$ 是标架 $\omega(s)$ 关于平面上某个固定标架的转动角(譬如说,关于标架 $\omega(0)$). 同时,由 Frenet 公式得到

$$\frac{d}{ds}\omega(s)=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}\omega(s).$$

比较所得到的矩阵,可以看到 $k(s)=\frac{d\varphi(s)}{ds}$. 这样,曲线在点 s 的曲率等于角 $\varphi(s)$ 在这点变化的速度. 对平面曲线来说,给定函数 $k(s)$,且对所有的 s,只要 $k\neq 0$,就完全确定了曲线. 更准确地说有下面的定理.

定理 3 给定光滑的函数 $k(s)$,且对所有的 $s, a\leqslant s\leqslant b, k(s)\neq 0$. 则在平面上存在光滑曲线 $\boldsymbol{r}(s)$,以 $k(s)$ 为它的曲率,以 s 为自然参数;$\boldsymbol{r}(s)$ 除平行移动和正交变换外是唯一确定的.

证明 考察微分方程组

$$\begin{pmatrix}\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}\\ \frac{d\boldsymbol{n}(s)}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}(s)\\ \boldsymbol{n}(s)\end{pmatrix},$$

其中 $k(s)$ 是给定的函数. 因为 $k(s)\neq 0$,所以根据微分方程理论的存在和唯一性定理,这个方程组有解(对给定的初始值有唯一解),此解在整个区间 $a<s<b$ 上是光滑的. 于是,可以考察方程 $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=k(s)\boldsymbol{v}(s)$. 根据同样的理由,这个方程在给定初始值时在整个区间 $a<s<b$ 有唯一解(验证解 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是所求的曲线!). 这里任何初始值可以用平面上的平行移动和旋转使它们相重合. 定理证毕.

条件 $k\neq 0$ 的作用如何? 考察光滑曲线,它的曲率函数是光滑的,并且在某点 $s=s_0$ 时,曲率以及曲率的所有阶导数都为 0. 这种曲线的存在性从定理 3 得到,只要取光滑函数 $k(s)$,使得它以及它的各阶导数在区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 的一个端点 a 或 b 上都为 0. 那么,在两条这样的曲线连接起来,而在它们的公共端点曲率函数以及其所有的导数为 0 时,我们就得到两条光滑曲线,它们有相同的曲率函数,但不是全等的(参看图 4.2).

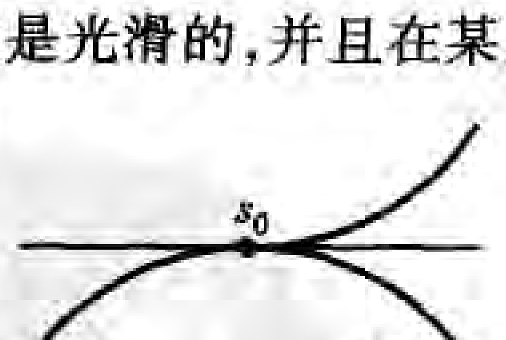


图 4.2

4.1.2 空间曲线论 Frenet 公式

现在考虑建立了笛卡儿坐标 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)$,即 $\boldsymbol{r}(t)=(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t))$. 也像平面的情况一样,曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的每一

点可以唯一地联系某个 Frenet 标架，当曲线的自然参数 s 变化时，这些标架沿着曲线光滑地变动. 我们先证明关于矩阵函数微分的辅助论断.

在矩阵线性空间，考察光滑曲线，即单参数矩阵簇$A(t)$，这里 t 在区间 $-a<t<a$ 上变化，$A(t)$是$(n\times n)$矩阵，其系数是 t 的光滑函数. 假定所有的矩阵 $A(t)$ $(-a<t<a)$都是行列式为 $+1$ 的正交矩阵，同时 $A(0)=E$，E 是单位矩阵.

引理 3 用 $X=\dot{A}(t)|_{t=0}$表示单参数正交矩阵簇 $A(t)$在 $t=0$ 时的导数，即 X 是由形如$\left.\dfrac{da_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$所组成的矩阵，这里 $A(t)=(a_{ij}(t))$，那么 X 是反对称矩阵.

证明 每一个正交矩阵 $A(t)$，其作用像算子，这个算子保持欧氏数量积. 因此，对任意两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有恒等式$\langle A(t)\boldsymbol{x},A(t)\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$. 因为左边是 t 的光滑函数，我们计算在 $t=0$ 时关于 t 的导数. 得到$\langle\dot{A}(t)\boldsymbol{x},A(t)\boldsymbol{y}\rangle|_{t=0}+\langle A(t)\boldsymbol{x},\dot{A}(t)\boldsymbol{y}\rangle|_{t=0}=0$，即

$$\langle X\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{x},X\boldsymbol{y}\rangle=0.$$

也就是说，矩阵 X 是反对称矩阵. 定理证毕.

矩阵值函数 $A(t)$在 $t=0$ 点可以按无穷小改变量 Δt 的幂分解

$$A(\Delta t)=E+\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0}\cdot\Delta t+\cdots.$$

在分解式中，矩阵 X 作为 Δt 的"系数"出现.

现在，我们来构造 Frenet 标架. 设 $\boldsymbol{r}(s)$是光滑的向量函数，它在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中给出了光滑的轨线 $\boldsymbol{r}(s)$. 假设对每个 s，$a\leqslant s\leqslant b$，n 个向量$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds},\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\cdots,\dfrac{d^n\boldsymbol{r}}{ds^n}$是线性无关的. 它们构成标架(非正交的!)，当点改变时，它是光滑的. 特别是所有$\dfrac{d^k\boldsymbol{r}}{ds^k}(k=1,2,\cdots,n)$不等于0.

命题 1 设$\boldsymbol{r}(s)$是 $\mathbf{R}^n$ 中光滑的向量函数，并设在区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上每一点，k 阶导数$\dfrac{d^k\boldsymbol{r}}{ds^k}$与导数$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds},\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\cdots,\dfrac{d^{k-1}\boldsymbol{r}}{ds^{k-1}}$是线性相关的，当 $a\leqslant s\leqslant b$ 时，$\dfrac{d^k\boldsymbol{r}}{ds^k}\neq0$，并且当 $a\leqslant s\leqslant b$ 时，导数$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds},\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\cdots,\dfrac{d^{k-1}\boldsymbol{r}}{ds^{k-1}}$是线性无关的. 那么，曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 全部包含在由向量$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds},\cdots,\dfrac{d^{k-1}\boldsymbol{r}}{ds^{k-1}}$所张成的$(k-1)$维平面上. 当 s 由 a 变到 b 时，这个平面不改变它在空间 $\mathbf{R}^n$ 中的位置.

证明 由所给的条件，存在光滑函数 $\lambda_i(s)$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$，

$$\frac{d^k\boldsymbol{r}}{ds^k}=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i(s)\frac{d^i\boldsymbol{r}}{ds^i}.$$

由于向量$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds},\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\cdots,\dfrac{d^{k-1}\boldsymbol{r}}{ds^{k-1}}$是线性无关的，这些向量可以取作由它们张成的平面

$\mathbf{R}^{k-1}$的基. 为了证明曲线$\gamma(s)$总是留在同一个$(k-1)$维平面内,只要证明当s改变时,平面$\mathbf{R}^{k-1}(s)$不改变它在空间$\mathbf{R}^n$中的位置. 只要证明这个基的导数由能够按这个基展开的向量组成. 由假设的条件,这是显然的. 命题证毕.

于是,若向量$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\cdots,\frac{d^n\boldsymbol{r}}{ds^n}$是线性无关的,那么曲线$\boldsymbol{r}(s)$不包含在任何当$s$变化时却是固定的$(n-1)$维的某个平面中. 现在,在每一点$s$构造标准正交基,其向量用$\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_n$表示. 设$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\boldsymbol{\tau}_1$. 然后考察由向量$\boldsymbol{\tau}_1$和$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$张成的二维平面,并选择这个平面中的向量$\boldsymbol{\tau}_2$,使$\boldsymbol{\tau}_2$垂直于$\boldsymbol{\tau}_1$. 因为按假设,$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$是线性无关的,所以$\boldsymbol{\tau}_2$在$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$上有非零的射影. 在$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3},\boldsymbol{\tau}_2,\boldsymbol{\tau}_1$张成的三维平面上选择向量$\boldsymbol{\tau}_3$,使$\boldsymbol{\tau}_3$垂直于由$\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$张成的平面. 继续这样的过程,就得到所求的标准正交标架$\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_n$. 很明显,在$s$变化时,标架$\boldsymbol{\tau}(s)$的向量也光滑地改变. 考察标架

$$\boldsymbol{\tau}(s)=(\boldsymbol{\tau}_1(s),\cdots,\boldsymbol{\tau}_n(s))$$

中向量的导数. 可以证明,它们也满足 Frenet 公式.

定理 4 设$\boldsymbol{r}(s)$为$\mathbf{R}^n$中光滑曲线,s是自然参数,若在$a\leqslant s\leqslant b$的每个点,$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\cdots,\frac{d^n\boldsymbol{r}}{ds^n}$是线性无关的,则存在光滑函数$k_2(s),\cdots,k_n(s)$,使下列等式成立(Frenet 公式)

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds}=k_2\boldsymbol{\tau}_2,\\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_2}{ds}=k_3\boldsymbol{\tau}_2-k_2\boldsymbol{\tau}_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_{n-1}}{ds}=k_n\boldsymbol{\tau}_n-k_{n-1}\boldsymbol{\tau}_{n-2},\\ \dfrac{d\boldsymbol{\tau}_n}{ds}=-k_n\boldsymbol{\tau}_{n-1},\end{cases}$$

即$\frac{d\boldsymbol{\tau}_i}{ds}=k_{i+1}\boldsymbol{\tau}_{i+1}-k_i\boldsymbol{\tau}_{i-1}$,这里$k_1=k_{n+1}=0$.

证明 因为向量$\boldsymbol{\tau}_i(1\leqslant i\leqslant n)$含在向量$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\cdots,\frac{d^i\boldsymbol{r}}{ds^i}$的线性包内,所以它的导数$\frac{d\boldsymbol{\tau}_i}{ds}$含在向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\cdots,\frac{d^i\boldsymbol{r}}{ds^i};\frac{d^{i+1}\boldsymbol{r}}{ds^{i+1}}$$

的线性包内,即存在某些函数$a_{i,1}(s),\cdots,a_{i,i+1}(s)$,使

$$\frac{d\tau_i}{ds}=\sum_{j=1}^{i+1}a_{i,j}(s)\tau_j(s).$$

因此,把向量组$\frac{d\tau_1}{ds},\cdots,\frac{d\tau_n}{ds}$用标架

$$\tau(s)=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$$

的向量表示出来,我们得到$(n\times n)$矩阵 X,则 X 将有下面的形式:

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & * & \\ & a_{23} & a_{33} & a_{43} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1,n-2,} & \\ & 0 & & & a_{n-1,n-1,} & a_{n,n-1} \\ & & & & a_{n-1,n,} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

另一方面,与二维的情形一样,我们可以把标架$\tau(s)$沿曲线 $\gamma(s)$的移转用正交矩阵簇 $A(s)$的术语来解释,那就是$\tau(s)=A(s)\cdot\tau(0)$. 给定这个单参数簇就唯一地确定了标架$\tau(s)$随 s 的变化. 这时,很明显,矩阵 X 将与导数$\frac{dA(s)}{ds}$在 $s=0$ 时的矩阵一致. 由引理3,矩阵 X 是反对称的,即

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & & & & & \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & & & 0 & \\ & a_{23} & 0 & -a_{34} & & & \\ & & a_{34} & 0 & & & \\ & & & \ddots & 0 & -a_{n-2,n-1} & \\ & 0 & & & a_{n-2,n-1} & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

把函数 $a_{i,i+1}(s)$取为 $k_i(s)$,就得到定理的证明. 定理证毕.

考察三维的情形:$n=3$. 这时 Frenet 公式取形式

$$\frac{d\tau_1}{ds}=k_2\tau_2;\quad \frac{d\tau_2}{ds}=k_3\tau_3-k_1\tau_1;\quad \frac{d\tau_3}{ds}=-k_3\tau_2.$$

向量τ_1 是曲线 $\boldsymbol{r}(s)$的单位速度向量,通常表示为$\boldsymbol{v}(s)$. 因为$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\perp\boldsymbol{v}$ 并且$|\boldsymbol{v}(s)|=1$,向量τ_2 与速度向量$\boldsymbol{v}$ 关于 s 的导数重合. 这里利用了 s 是自然参数的事实. 向量τ_3 垂直于$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}$,即它与向量$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的向量积重合. 向量 $\boldsymbol{n}$ 称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$的**法向量**,而向量 $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}]$称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$的**从法向量**,这里的$[\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}]$表示$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的

向量积. 采用这些符号时,Frenet 公式写为

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}=k\boldsymbol{n};\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\kappa\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{n};\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\kappa\boldsymbol{n}.$$

$k(s)=k_2(s)$ 也称为曲线的**曲率**,而 $\kappa(s)=k_3(s)$ 也称为曲线的**挠率**(有时向量 $\boldsymbol{n}(s)$ 不是简单地称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的"法向量",而是称为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的"**主法向量**").

为了使用曲率方便起见,我们总认为向量 τ_2 与 $\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\right|$ 重合;这时 $k(s)$ 与向量 $\frac{d\boldsymbol{v}(s)}{ds}$ 的模相等,并且因此取正数(我们认为向径相应的导数不等于0). 如果曲线是平面曲线,那么从法线向量是常向量,当点在曲线上变化时,它不改变;特别是,曲线的挠率等于0. 因此,从 $\mathbf{R}^3$ 的观点来看,平面曲线可刻画为挠率为0的曲线. 我们更详细地来考查当空间曲线的挠率不等于0时其挠率的作用. 考虑标架 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ 沿着曲线滑动,并把向量 $\boldsymbol{b}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{v}(s)$ 射影到由 $\boldsymbol{b}(s_0)$ 和 $\boldsymbol{n}(s_0)$ 所张成的平面上,这里 s_0 是参数 s 的某个固定值,而假定值 s 无限靠近 s_0. 这时,速度向量射影为有无穷小长度的向量,因此可以认为(一级近似)这个向量射影为0. 这时,在 $\boldsymbol{b}(s_0),\boldsymbol{n}(s_0)$ 的平面上,向量 $\boldsymbol{b}(s),\boldsymbol{n}(s)$ 在它上面的射影产生某种运动. 由 Frenet 公式得到,这个运动由公式 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\kappa\boldsymbol{b};\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\kappa\boldsymbol{n}$ 所描述,即运动由反对称矩阵 $\begin{pmatrix}0&\kappa\\-\kappa&0\end{pmatrix}$ 所确定,它确定的是标架 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}$ 的无穷小旋转. 因而,向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}$ 围绕曲线的速度向量旋转,并且这个旋转的速度由曲线的挠率所唯一决定(由此,恰好就是术语"挠率"的起源). 这时,如果曲线起初是平面曲线的话,则现在曲线失去了自己的平面形式,并且变为"在空间中隆起". 于是,空间曲线(局部的)可以从平面曲线得到:沿曲线以等速运动,同时在每一时刻都借助于挠率 κ"扭转"这个曲线(图4.3).

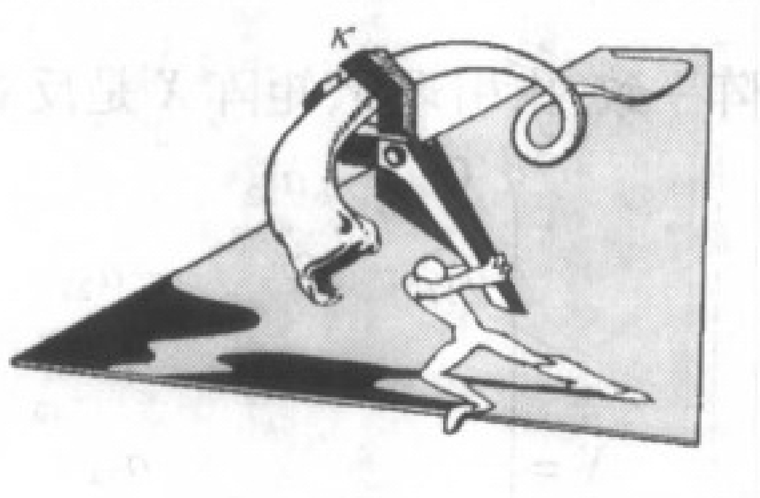


图 4.3

命题 2 具有非零速度向量的光滑曲线是一维光滑流形,光滑地嵌入 $\mathbf{R}^n$.

证明 曲线是光滑流形直接由光滑流形的定义得到. 剩下的就是验证它是 $\mathbf{R}^n$ 的光滑子流形,为此应该研究包含映射 i 的微分,即线性映射 di. 既然它完全由曲线的速度向量确定,Jacobi 矩阵在曲线的每一点就有最大秩,从而曲线是子流形. 命题证毕.

显然,任何一维光滑闭(即没有边缘)流形或与直线(非紧致流形)微分同胚,或与圆周(紧致流形)微分同胚. 于是,所有一维流形仅限于两种不同的流形. 这两种流形相互不能成微分同胚,因为直线是非紧致的,而圆周是紧致的.

习 题

1. 证明:如果平面曲线的曲率恒等于0,那么它是直线.
2. 证明:三维空间平面曲线的特征是 $\kappa=0$.
3. 证明:三维空间中直线的特征是 $k=0,\kappa=0$.
4. 写出 $k=$常数,$\kappa=$常数的一类曲线.
5. 证明:质点在中心力场中的运动轨迹是平面曲线.

4.2 曲面 第一和第二基本形式

4.2.1 第一基本形式

考虑欧氏空间 $\mathbf{R}^n$,V^{n-1}为 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-1$ 维(有人也称"余维数为1")光滑子流形. 现在,主要关心的是超曲面的局部性质. 因此,可以认为是圆盘 D^{n-1}在 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑嵌入. 前面已经讨论各种给出超曲面的方法. 我们选择 V^{n-1}的参数表示,即认为 V^{n-1}由光滑向径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^{n-1})$ 所给出,其中 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 在欧氏参数空间 $\mathbf{R}^{n-1}$的某个圆盘上变化. 可以认为向量$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{n-1}}$在定义域中每一点都是线性无关的. 这些向量是曲面 V^{n-1}上经过给定点 P 的相应坐标曲线的切向量. V^{n-1}在 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑嵌入,在 V^{n-1}上产生诱导黎曼度量. 我们再提一下这个构造.

设 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的笛卡儿坐标,这时向径 $\boldsymbol{r}$ 由一组光滑函数 $x^i(u^1,\cdots,u^{n-1})$ $(1\leqslant i\leqslant n)$给出. 设 $\mathbf{R}^n$ 的欧氏度量为

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2,$$

这时就有下面的二次形式

$$\begin{aligned}ds^2|_{V^{n-1}}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k,p=1}^{n-1}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial x^i}{\partial u^p}du^k du^p\\&=\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}(u)du^k du^p,g_{kp}=\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^p}\right\rangle,\end{aligned}$$

这里用$\langle,\rangle$表示 $\mathbf{R}^n$ 的数量积.

定义1 形式

$$ds^2|_{V^{n-1}}=\sum_{k,p}g_{kp}du^k du^p$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中超曲面 V^{n-1}的**第一基本形式**,其中

$$g_{kp}(u^1,\cdots,u^{n-1})=\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^k},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^p}\right\rangle.$$

第一基本形式定义在 V^{n-1}的切向量上;更确切地说,如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(V^{n-1})$是两

个切向量,那么定义它们的数量积为$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_{ds^2(V^{n-1})}=g_{kp}a^kb^p=\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}a^kb^p$. 提醒一下,为简化符号,当求和对于相同的上指标和下指标进行时,省略掉求和的符号. 显然,数量积$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_{ds^2(V^{n-1})}$很自然地与$\mathbf{R}^n$中的向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的数量积相同. 由函数$g_{kp}(u^1,\cdots,u^{n-1})$组成的度量张量矩阵$\mathfrak{G}$是对称的矩阵.

位于V^{n-1}上的弧$\gamma(t)$的长度用公式

$$l_a^b(\gamma(t))=\int_a^b\sqrt{\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle}dt$$

表示. 即

$$l_a^b(\gamma(t))=\int_a^b\sqrt{\sum_{k,p=1}^{n-1}g_{kp}(u(t))\frac{du^k(t)}{dt}\frac{du^p(t)}{dt}}dt.$$

这个公式是"合适的",在于参与这个公式中的函数$g_{kp}(u)$不依赖于曲面V^{n-1}上曲线的选择,而仅依赖于曲面V^{n-1}本身和它的参数化. 此外,在曲面等长变化时,例如把平面弯曲成柱面,这些函数是不改变的.

对不同方法给出的超曲面如何得到第一基本形式? 设V^{n-1}以图像$x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$形式给出. 我们有

$$\begin{aligned}ds^2|_{V^{n-1}}&=\sum_{i=1}^{n-1}(dx^i)^2+(dx^n(x^1,\cdots,x^{n-1}))^2\\&=\sum_{k,p=1}^{n-1}\left(\delta_{kp}+\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^p}\right)dx^kdx^p,\end{aligned}$$

有时,用f_{x^α}表示$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

现在,设曲面V^{n-1}借助于隐函数,即由$F(x^1,\cdots,x^n)=0,\frac{\partial F}{\partial x^n}\neq0$给出. 这时,根据隐函数定理,方程$F(x^1,\cdots,x^n)=0$存在形如$x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$的局部解,并且$\frac{\partial f}{\partial x^i}=-\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big/\frac{\partial F}{\partial x^n}$. 由此得到$\mathfrak{G}=(g_{kp})$,这里

$$g_{kp}=\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^p}\right)\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2\right]+\delta_{kp}.$$

考察二维曲面在三维欧氏空间的嵌入. 设V^2由参数式$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$给出. 这时第一基本形式通常写为:

$$ds^2(V^2)=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

其中$E=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle,F=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle,G=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle$,这些是第一基本形式的系数,用向径$\boldsymbol{r}$的分量表示时,有

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2;F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v;$$
$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

注意,如果$E=G,F=0$,则度量$ds^2(v^2)$称为是**共形欧氏的**.

考察嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中旋转曲面的第一基本形式. 设在 $\mathbf{R}^3$ 上建立了柱面坐标(r,φ,z),并设二维曲面由参数式$(\varphi=u,z=v,r=r(v))$给出. 计算后可得

$$ds^2(V^2)=(1+(r_v')^2)dv^2+r^2du^2,$$

这里,$F(u,v)=0,E(u,v)=r^2(v),G(u,v)=1+(r_v')^2$. $F=0$ 的事实意味着坐标线 $v=v_0=$ 常数和 $u=u_0=$ 常数在每一点都互相垂直(图 4.4)

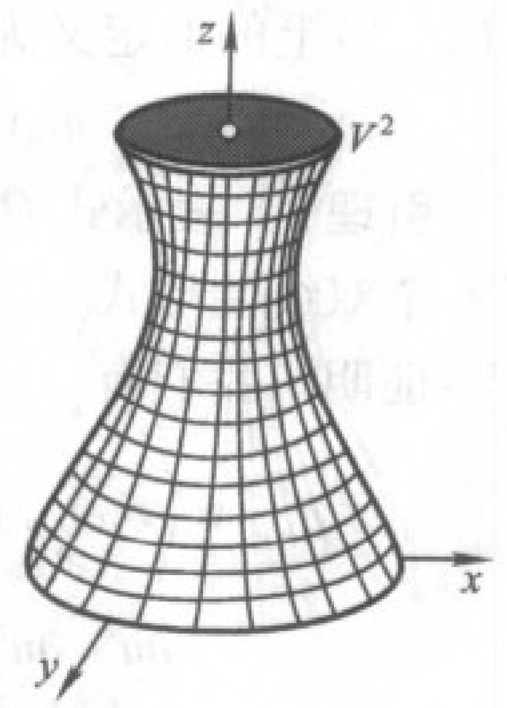


图 4.4

引理 1 设 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 是光滑子流形,$\mathfrak{G}$ 为第一基本形式. 则形式 $\mathfrak{G}$ 是满秩的.

证明 由向径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^{n-1})$的定义知,所有的向量 $\boldsymbol{r}_{u^k},1\leqslant k\leqslant n-1$,是线性无关的. 因为矩阵 $\mathfrak{G}$ 由向量 $\boldsymbol{r}_{u^k}$ 和 $\boldsymbol{r}_{u^p}$的数量积组成,所以 $\mathfrak{G}$ 是满秩的. 引理证毕.

4.2.2 第二基本形式

设有 $\mathbf{R}^n$ 中的超曲面 $V^{n-1}:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^{n-1})$. 设 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(P)$是在点 P 垂直于曲面 V^{n-1}的单位法向量. 定义二次形式 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$,对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in T_P(V^{n-1})$,其值为 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$. 考察 V^{n-1}上经过点 P 的任意光滑曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{\gamma}(0)=P,\dot{\boldsymbol{\gamma}}(0)=\boldsymbol{a}$. 这样的曲线尽管不是唯一确定的,而总是存在的(图 4.5). 因为沿着曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t)$, 向径 $\boldsymbol{r}$ 是 t 的函数, 所以 $\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}(u(t)))|_{t=0}$. 考虑向量函数 $\boldsymbol{r}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(u(t))$和它关于 t 的导数,即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(u(t)).$$

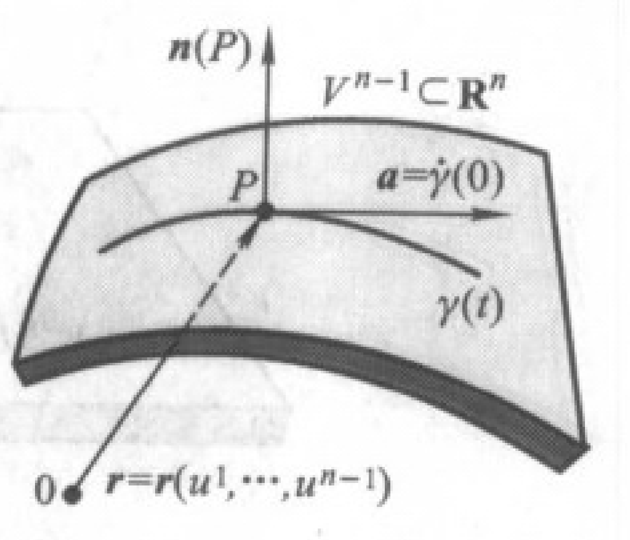


图 4.5

用 $\ddot{\boldsymbol{r}}_a$ 表示 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 在 $t=0$ 的值. 这恰好是向径 $\boldsymbol{r}$ 关于向量 $\boldsymbol{a}$ 方向的二阶导数.

定义 2 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\langle\ddot{\boldsymbol{r}}_a,\boldsymbol{n}\rangle$.

我们定义的数是点 P 处的向量 $\ddot{\boldsymbol{r}}_a$ 在法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的射影(参看图 4.6). 我们借助于向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标来计算 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$的值. 有

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{r}_{u^ku^p}\frac{du^k}{dt}\cdot\frac{du^p}{dt}+\boldsymbol{r}_{u^k}\frac{d^2u^k}{dt^2};$$

$$\left\langle\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(u(t)),\boldsymbol{n}\right\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_{u^ku^p}\frac{du^k}{dt}\frac{du^p}{dt},\boldsymbol{n}\right\rangle+0;$$

同时应该记得,向量 $\boldsymbol{a}$ 有坐标$\left(\frac{du^1(0)}{dt},\cdots,\frac{du^{n-1}(0)}{dt}\right)$,即有

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{u^ku^p}|_{t=0}\rangle a^ka^p.$$

这个二次形式唯一地确定了双线性形式 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，它在任意一对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(V^{n-1})$ 上的值定义为 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=q_{kp}(P)a^kb^p$，其中

$$q_{kp}(P)=\langle \boldsymbol{r}_{u^ku^p}|_{t=0},\boldsymbol{n}\rangle.$$

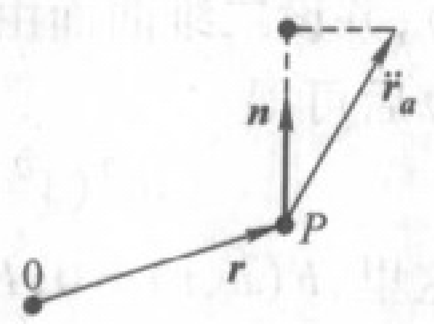


图4.6

引理2　表示式 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=q_{kp}a^kb^p,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(V^{n-1})$，定义了一个双线性形式.

证明　我们有

$$q_{k'p'}=\left\langle \boldsymbol{r}_{u^{k'}}\boldsymbol{r}_{u^{p'}}|_{t=0},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}}\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{r}(0)}{\partial u^k\partial u^p},\boldsymbol{n}\right\rangle$$

$$=\frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}}q_{kp},$$

即在坐标变换时，函数 q_{kp} 作为双线性形式的系数而变换. 引理证毕.

定义3　双线性形式 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 称为曲面 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 的**第二基本形式**.

显然，形式 Q 依赖于 V^{n-1} 在 $\mathbf{R}^n$ 中的嵌入方法，即在 V^{n-1} 光滑变形时，一般地说，这个形式要改变. V^{n-1} 在 $\mathbf{R}^n$ 中作等长变形时，形式 Q 不是不变的. 例如，设 V^2 是 $\mathbf{R}^3$ 的二维平面，这时向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 可看作为参数 u,v 的线性函数. 于是第一基本形式是欧氏平面度量 du^2+dv^2（图4.7）.

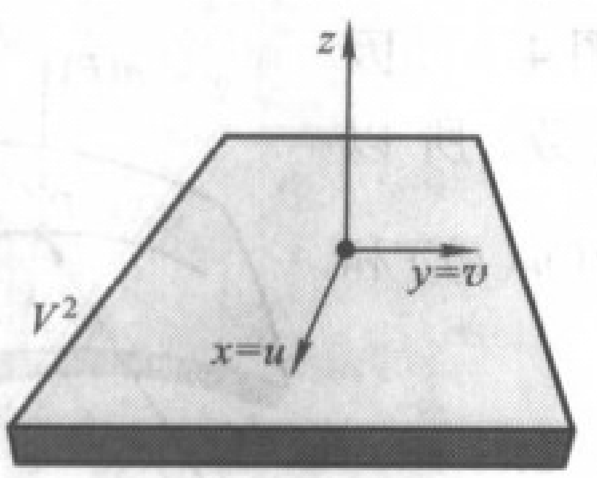


图4.7

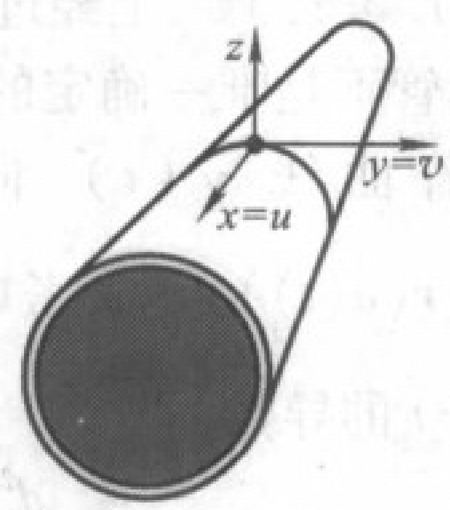


图4.8

现在考察 V^2 的等长变换——把平面 V^2 卷为柱面，它的轴平行于 Ox（图4.8）. 显然，柱面的第二基本形式不等于0，因为 $\langle\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle$ 不等于0. 而平面 V^2 的第二基本形式恒等于0. 于是，在弯曲（即等长变形）时，第二基本形式改变.

考察给定的子流形 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$. 在每一点 P，有一对形式 $\mathfrak{G}$ 和 Q（第一基本形式和第二基本形式）. 与这一对形式相联系的有一组不变量，它们使我们能研究 V^{n-1} 而不依赖于其引进的坐标系. 用 $\mathfrak{G}$ 和 Q 表示相应的矩阵，并考察变量 λ 的多项式 $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})$. 因为形式 $\mathfrak{G}$ 是非退化的，所以存在 $\mathfrak{G}$ 的逆矩阵 $\mathfrak{G}^{-1}$，于是方程 $\det(\mathfrak{G}^{-1}Q-\lambda E)=0$ 与方程 $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=0$ 是等价的.

用 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 表示 $\mathfrak{G}^{-1}Q$ 的特征值，即方程 $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=0$ 的根. 不久，我们就要证明所有的特征值都是实数. 把特征多项式 $F(\lambda)$ 写成形式：$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sigma_k\lambda^k$，

这里 σ_k 是根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ 的对称多项式.

引理 3 函数 $\sigma_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$ 是一对形式 $\mathfrak{G}$ 和 Q 的不变量，即在点 $P\in V^{n-1}$ 的邻域中作任何非退化的坐标变换时，$\sigma_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$ 都保持不变.

证明 在点 P 的邻域中作正则坐标变换 $x\to x'$，在 P 点的切空间 $T_P(V^{n-1})$ 中，借助于变换的 Jacobi 矩阵 J，诱导出非退化的线性变换. 这时矩阵 $\mathfrak{G}$ 和 Q 受到变换

$$\mathfrak{G}\to J\mathfrak{G}J^{\mathrm{T}}=\mathfrak{G}';Q\to JQJ^{\mathrm{T}}=Q'.$$

于是

$$\begin{aligned}\det((\mathfrak{G}')^{-1}Q'-\lambda E)&=\det[(J^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot(\mathfrak{G}^{-1}Q-\lambda E)J^{\mathrm{T}}]\\&=\det(\mathfrak{G}^{-1}Q-\lambda E).\end{aligned}$$

这就是所要证明的. 引理证毕.

我们特别感兴趣的是下列不变量

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k=\mathrm{Spur}(\mathfrak{G}^{-1}Q);$$

$$\sigma_{n-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k=\det(\mathfrak{G}^{-1}Q).$$

定义 4 函数 $H(P)=\sigma_1(P)=\sigma_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$ 称为曲面 V^{n-1} 在点 $P\in V^{n-1}$ 的**平均曲率**.

$$K(P)=\sigma_{n-1}(P)=\sigma_{n-1}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$$

称为曲面 V^{n-1} 在点 P 的 Gauss **曲率**.

若 $n=3$，则 $H(P)=\lambda_1+\lambda_2,K(P)=\lambda_1\cdot\lambda_2$.

定理 1 一对形式 $\mathfrak{G}$ 和 Q 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 都是实数. 当所有的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 两两不相等时，无论是关于外围空间 $\mathbf{R}^n$ 的度量还是关于嵌入 $V^{n-1}\to\mathbf{R}^n$，在 V^{n-1} 上诱导的度量，矩阵 $\mathfrak{G}^{-1}Q$ 的所有特征向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 都是互相垂直的.

证明 根据代数的定理，对称矩阵的特征值为实数，并且对不同的特征值所对应的特征向量互相垂直. 暂时，这个定理还不能用于我们的情况，因为，一般情况下，矩阵 $\mathfrak{G}^{-1}Q$ 不是对称的. 如果 $\mathfrak{G}$ 和 Q 是可交换时，那么 $\mathfrak{G}^{-1}Q$ 就具有对称性. 因为形式 $\mathfrak{G}(P)$ 在每一点 P 是对称的，所以在点 P 的某个邻域中存在正则的坐标变换 $x\to x'$，使得在一点 P，形式 $\mathfrak{G}(P)$ 可化为对角形式. 把 $\mathfrak{G}$ 化为对角形式后，还需沿着主轴伸长，使它化为单位矩阵. 设 A 是线性算子：A: $T_P(V^{n-1})\to T_P(V^{n-1})$，它把 $\mathfrak{G}$ 化为单位矩阵；这时 $\mathfrak{G}=AEA^{\mathrm{T}}=AA^{\mathrm{T}}$. 矩阵 E，在 $T_P(V^{n-1})$ 中定义了正交基 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$. 我们得到

$$\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=\det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^{\mathrm{T}}-\lambda E)A^{\mathrm{T}}].$$

考察形式 $\tilde{Q}=BQB^{\mathrm{T}},B=A^{-1}$. 因为 $\det A\neq0$，原来的方程 $\det(Q-\lambda\mathfrak{G})=0$，在基 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$ 下写成

$$\det(\widetilde{Q}-\lambda E)=0.$$

同时,因为 $Q^{\mathrm{T}}=Q$,从而有 $\widetilde{Q}^{\mathrm{T}}=\widetilde{Q}$. 于是,形式 $\widetilde{Q}$ 与矩阵 $\mathfrak{G}^{-1}Q$ 的所有特征值和特征向量全相同. 因为形式 $\widetilde{Q}$ 是对称的,所以所有的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 都是实数,并且当它们两两不相等时,所有的特征向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 都相互垂直. 这一点便由已知的代数理论得到. 定理证毕.

定义 5　向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$(若当 $i\neq j$ 时有,$\lambda_i\neq\lambda_j$,则唯一确定)给出的方向称为超曲面 V^{n-1} 在点 P 的**主方向**,或称为**主轴**.

于是,超曲面 V^{n-1} 上每一点连接了唯一确定(若当 $i\neq j$ 时有 $\lambda_i\neq\lambda_j$)的,光滑地依赖于点 P 的正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$(精确到符号的选择).

因为在正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$,下,矩阵 $\mathfrak{G}$ 变为单位矩阵,那么 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 与在正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 下形式 Q 的特征值相同.

考察特殊情况. 设 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 由 $x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 的图的形式给出;设平面 $T_P(V^{n-1})$ 在某一点 $P\in V^{n-1}$ 与变量 $x^1,\cdots,x^{n-1}$ 的平面一致(图 4.9). 这时,V^{n-1} 在点 P 的法向量 $\boldsymbol{n}(P)$ 有坐标 $(0,\cdots,0,1)$;曲面 V^{n-1} 的向径 $\boldsymbol{r}$ 有形式:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,\cdots,x^{n-1})=(x^1,\cdots,x^{n-1},f(x^1,\cdots,x^{n-1})).$$

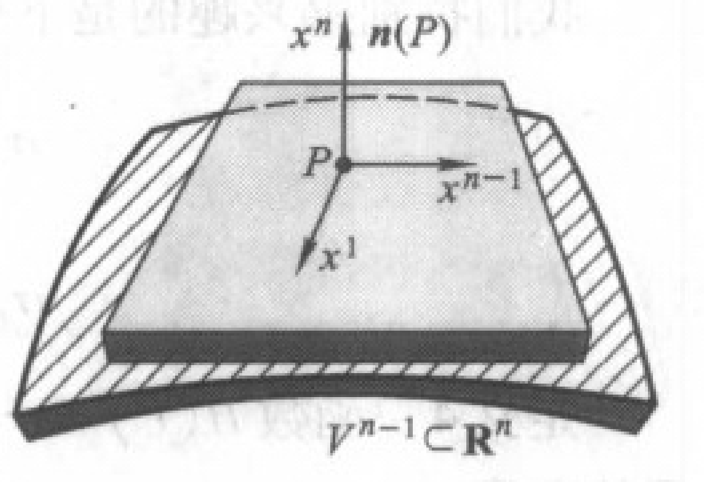


图 4.9

因为超曲面 $(x^1,\cdots,x^{n-1})=T_P(V^{n-1})$ 在点 P 切于 V^{n-1},所以关系式 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P=0\,(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 成立;因为

$$g_{ij}=f_{x^i}f_{x^j}+\delta_{ij},$$

由此得到 $\mathfrak{G}(P)=E$. 考虑矩阵 $Q=(q_{ij})$,其中

$$q_{ij}=\langle \boldsymbol{r}_{x^ix^j},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i\partial x^j}.$$

于是,$Q=(f_{x^ix^j}(P))$ 与函数 f 在点 P 的 Hessian 矩阵一致. 平均曲率 $H(P)$ 有形式:

$$H(P)=\sum_{k=1}^{n-1}f_{x^kx^k};$$

Gauss 曲率 $K(P)$ 有形式:

$$K(P)=\det(f_{x^ix^j}(P)).$$

对于二维曲面 $(n=3)$,我们有:

$$z=f(x,y);H(P)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta f,$$

这里,$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子;

$$K(P)=\det\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2.$$

4.2.3 超曲面上光滑曲线的初等理论

考虑任意点 $P\in V^{n-1}$，设 $\boldsymbol{n}(P)$ 是超曲面 V^{n-1} 在 $\mathbf{R}^n$ 中的法向量. 考察通过点 P 的二维平面 $\mathbf{R}^2$，它与 V^{n-1} 相交于某个光滑曲线 $\gamma(t)=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$. 我们感兴趣的仍是仅在点 P 的小邻域中.

定义 6 光滑曲线 $\gamma(t)=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$ 称为超曲面 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 的平面截线.

设 γ 是 V^{n-1} 的平面截线（固定包含它的平面 $\mathbf{R}^2$），设点 O 为坐标原点，由点 O 发出的向径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,\cdots,u^{n-1})$ 给出曲面 V^{n-1}. 设 $\boldsymbol{m}(P)$ 是包含在 $\mathbf{R}^2$ 中的平面曲线 $\gamma=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$ 的法向量（图 4.10）. 一般地说，法向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 是不重合的.

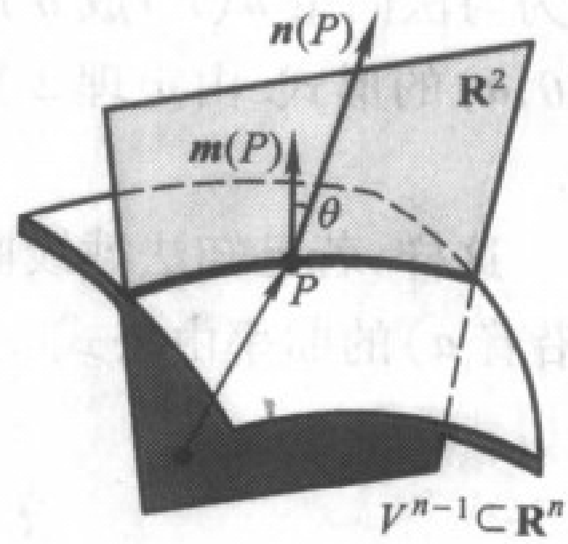


图 4.10

在曲线 $\gamma=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$ 上引进自然参数 $s:\gamma=\gamma(s)$（s 是弧长）. 这时，在平面 $\mathbf{R}^2$ 内，曲线 $\gamma(s)$ 由向径 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u^1(s),\cdots,u^{n-1}(s))$ 给出. 由 Frenet 公式，对平面曲线有 $k(s)=\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\right|$，$k(s)$ 是曲线 $\gamma(s)$ 在点 P 的曲率.

同样，也有 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}=\boldsymbol{m}k(s)$. 另一方面，若 $\boldsymbol{a}=\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{r}(s)$ 是曲线 $\gamma(s)$ 在点 P 的速度向量，那么（由第二基本形式 Q 的定义）有

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\langle k\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=k\cos\theta,$$

其中 θ 在点 P 的法向量 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角（参看图 4.10）. 此外，

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2}\cdot Q\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right),$$

这里，t 是沿曲线 $\gamma=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$ 的任意光滑参数，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}$ 是曲线 γ 在点 P 的任意切向量. 如果 $\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^{n-1})$，那么

$$k\cos\theta=\frac{q_{ij}a^ia^j}{g_{ij}a^ia^j}.$$

于是我们证明了下面的定理.

定理 2（Meusnier） 对任何切向量 $\boldsymbol{a}\in T_P(V^{n-1})$ 和任何平面截线 $\gamma(\dot{\gamma}=\boldsymbol{a})$，第二基本形式与第一基本形式之比等于 $k\cdot\cos\theta$，即

$$\frac{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}{\mathfrak{G}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\frac{q_{ij}a^ia^j}{g_{ij}a^ia^j}=k\cos\theta.$$

曲率 k 称为平面**截线曲率**.

我们从平面截线中分出一类法截线.

定义 7 在点 P 的平面截线 $\gamma=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$，若 $\boldsymbol{n}(P)\in\mathbf{R}^2$，即 $\theta=0$ 时，则称 γ 为**法截线**.

这样,在点 $P\in V^{n-1}$ 的每一条法截线 γ 由切向量 $\boldsymbol{a}\in T_P(V^{n-1})$ 唯一确定,也就是说,确定这个截线的平面 $\mathbf{R}^2$ 由法向量 $\boldsymbol{n}(P)$ 和向量 $\boldsymbol{a}\in T_P(V^{n-1})$ 所张成. 绕着 $\boldsymbol{n}(P)$ 旋转平面 $\mathbf{R}^2$,得到超曲面 V^{n-1} 在点 P 的所有的法截线.

对于法截线 $\gamma=\mathbf{R}^2\cap V^{n-1}$,由于 $\theta=0$,定理 2 中证明的公式成为

$$k=\frac{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}{\mathfrak{G}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\frac{q_{ij}a^ia^j}{g_{ij}a^ia^j}.$$

因为与法向量 $\boldsymbol{n}(P)$ 成 θ 角(沿向量 $\boldsymbol{a}$)的平面截线的曲率与 θ 有关,该函数可写成 $k(\theta,\boldsymbol{a})$ 的形式. 由定理 2 知 $k(\theta,\boldsymbol{a})\cos\theta=k(0,\boldsymbol{a})$,$k(0,\boldsymbol{a})$ 是法截线(沿着 $\boldsymbol{a}$)的曲率.

这样,若已知法截线曲率 $k(0,\boldsymbol{a})$,则任何与 $\boldsymbol{n}$ 成 θ 角的平面所得的平面截线(沿着 $\boldsymbol{a}$)的曲率由公式

$$k(\theta,\boldsymbol{a})=\frac{1}{\cos\theta}k(0,\boldsymbol{a})$$

得到.

现在,我们注意到主方向 $\boldsymbol{e}_1(P),\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}(P)$ 总是确定在切平面 $T_P(V^{n-1})$ 中,而当 $i\neq j$ 时,有 $\lambda_i\neq\lambda_j$,则这些主方向是唯一确定的. 考察这些"主轴" $\boldsymbol{e}_1(P),\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}(P)$,并按每一个"主轴"构造相应的法平面截线 $\gamma_i=\mathbf{R}_i^2\cap V^{n-1}$,这里,平面 $\mathbf{R}_i^2$ 由 $\boldsymbol{n}(P)$ 和 $\boldsymbol{e}_i(P)$ 张成. 所有的主方向 $\boldsymbol{e}_i(P)$ 在平面 $T_P(V^{n-1})$ 的欧氏度量下互相垂直. 用 $k_i(P)$ 表示法截线 γ_i 的曲率(这些截线有时称为主法截线).

定理 3 特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 与主法截线的曲率 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 相等.

证明 由定理 2,有

$$k\cos\theta=\frac{q_{ij}a^ia^j}{g_{ij}a^ia^j},$$

因为对法截线有 $\theta=0$,所以有

$$k=\frac{q_{ij}a^ia^j}{g_{ij}a^ia^j},$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是确定法截线的向量. 在 $T_P(V^{n-1})$ 中建立正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$,这时 $g_{ij}=\delta_{ij}$,$q_{ij}=\delta_{ij}\lambda_i$,由此得

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(a^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1}(a^i)^2},$$

如果 $\boldsymbol{a}\in T_P(V^{n-1})$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 中的一个重合,则有 $k_i=\lambda_i$. 定理证毕.

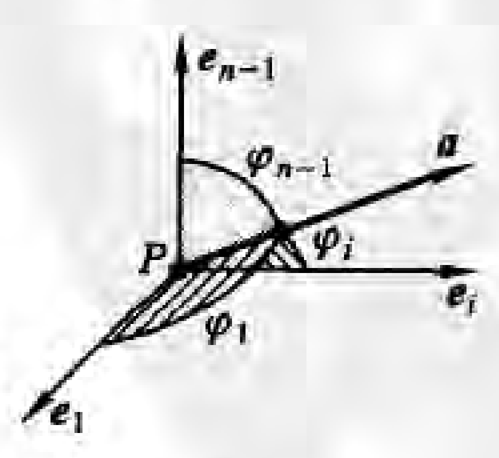


图 4.11

在 $T_P(V^{n-1})$ 中,考察任意向量 $\boldsymbol{a}$ 和沿 $\boldsymbol{a}$ 的法截线. 用 $\varphi_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与主方向 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 所成的角(图

4.11).

命题 1 对沿着任何向量 $\boldsymbol{a}\in T_p(V^{n-1})$ 的法截线满足 Euler 公式

$$k=k(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\cos^2\varphi_i.$$

证明 由定理3,有

$$k(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\left(\frac{a^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(a^i)^2}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\cos^2\varphi_i$$

这里,

$$\cos\varphi_i=\frac{a^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(a^i)^2}}=\frac{a^i}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Euler 公式可用来探讨主曲率 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 的所谓的"极值性质."把法截线曲率 $k(\boldsymbol{a})$ 看作 $\boldsymbol{a}\in T_p(V^{n-1})$ 的函数. 设 $x^i=\cos\varphi_i$,可以认为 $k(\boldsymbol{a})=k(x^1,\cdots,x^{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(x^i)^2$ 是球面 S^{n-2} 上的函数,球面在 $T_p(V^{n-1})$ 中的方程为 $(x^1)^2+\cdots+(x^{n-1})^2=1$. 因为球面 S^{n-2} 是光滑流形,所以在每一点 $x\in S^{n-2}$ 的邻域中可引进局部坐标 $y^1,\cdots,y^{n-2}$,如果 $\left.\frac{\partial f}{\partial y^i}\right|_{x_0}=0,1\leqslant i\leqslant n-2$,我们就称点 x_0 是 S^{n-2} 上给定函数 $f(x)$ 的临界点.

问题 光滑函数 $k(\boldsymbol{a})$ 在球面 $S^{n-2}\subset T_p(V^{n-1})$ 上有怎样的临界点? 曲率 $k(\boldsymbol{a})$ 在这些临界点上取怎样的值?

定理 4 若当 $i\neq j$ 时有 $\lambda_i\neq\lambda_j$,则曲率函数 $k(\boldsymbol{a})$ 在球面 $S^{n-2}\subset T_p(V^{n-1})$ 上的临界点是 $\pm\boldsymbol{e}_i,1\leqslant i\leqslant n-1$(即向量 $\pm\boldsymbol{e}_i$ 的终点). 在这些点 $\pm\boldsymbol{e}_i$ 上,函数 $k(\boldsymbol{a})$ 取值 $\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n-1$. 在这个意义上,主曲率就是曲率函数 $k(\boldsymbol{a})$ 极值. 如果特征值 $\{\lambda_i\}$ 中有相同的值,那么结论为:函数 $k(\boldsymbol{a})$ 的临界点是形式 Q 的所有特征向量的终点.

证明由读者完成.

设 $n=3$. 这时 Euler 公式具有形式

$$k(\boldsymbol{a})=\lambda_1\cos^2\varphi_1+\lambda_2\cos^2\varphi_2,$$

这里 $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2=1$(设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2$),即

$$k(\boldsymbol{a})=(\lambda_1-\lambda_2)\cos^2\varphi_1+\lambda_2.$$

显然,$k(\boldsymbol{a})$ 的最小值等于 λ_2;$k(\boldsymbol{a})$ 的最大值等于 λ_1. 若 $\lambda_1=\lambda_2$,则 $k(\boldsymbol{a})=\lambda(=\lambda_1=\lambda_2)$(参看图 4.12).

曲面 $\lambda_1\cos^2\varphi_1+\cdots+\lambda_{n-1}\cos^2\varphi_{n-1}=$ 常数称为法曲率二次曲面. 这时,相应于曲率极值(临界值)的方向与这个曲面的主轴重合. 如果所有的主曲率 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 都是正的,则二次曲面是椭球面.

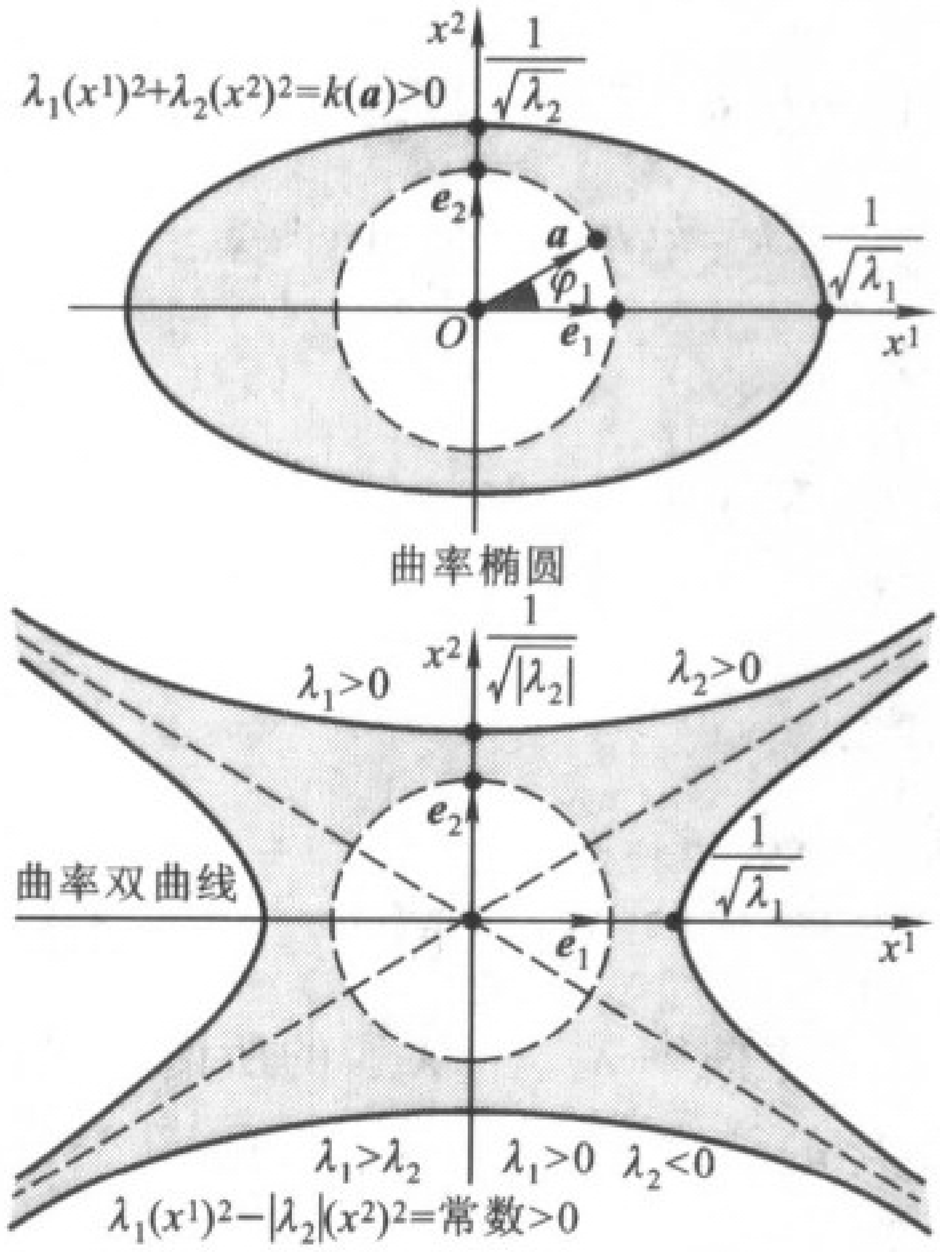


图 4.12

考虑二维曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$. Gauss 曲率 $K(P)$ 给出了二维曲面的重要局部性质. 由于 $K(P)=\lambda_1\cdot\lambda_2$,因此可分为三种情形:

(1) $K>0$;(2) $K<0$;(3) $K=0$.

只要考虑情形(1) $\lambda_1>0,\lambda_2>0$;(2) $\lambda_1>0,\lambda_2<0$;(3) $\lambda_1=0,\lambda_2\neq0$;$\lambda_1=\lambda_2=0$ 就足够了.

(1) 曲面是凸起的,即这时曲面 V^2 局部地位于点 P 的切平面的一侧(图 4.13).

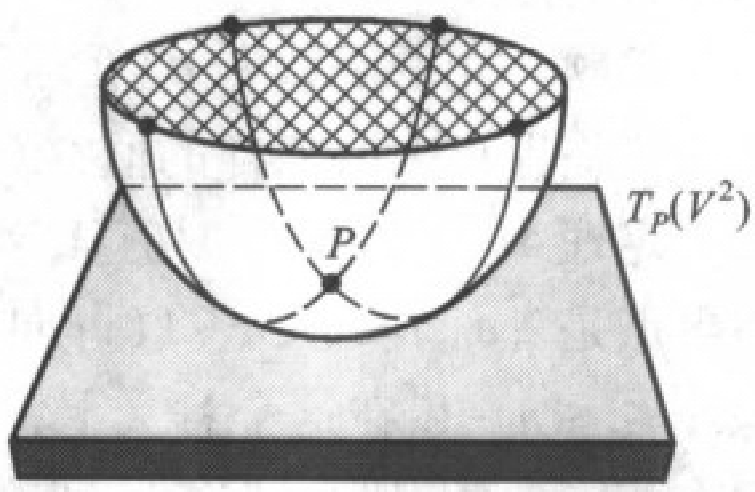


图 4.13

(2) 曲面 V^2 在点 P 邻近有图 4.14 表示的鞍子形式(局部). 这种类型的点 P 称为**鞍点**,或**峪点**.

(3) $\lambda_2\neq0,\lambda_1=0$. 曲面 V^2 在点 P 邻近(局部一阶近似)有"柱面"形式(图 4.15).

如果两个主曲率都为 0,这样的点称为曲面的平点①.

① 原文为 уплощение——译注.

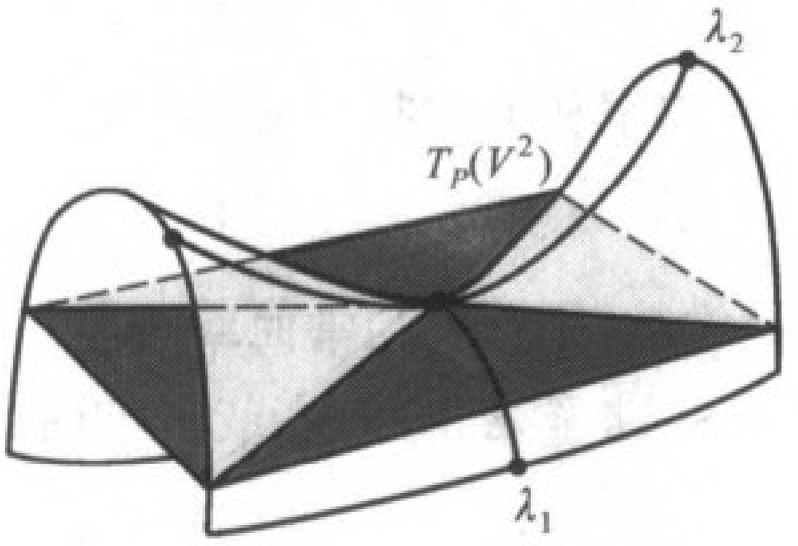


图 4.14

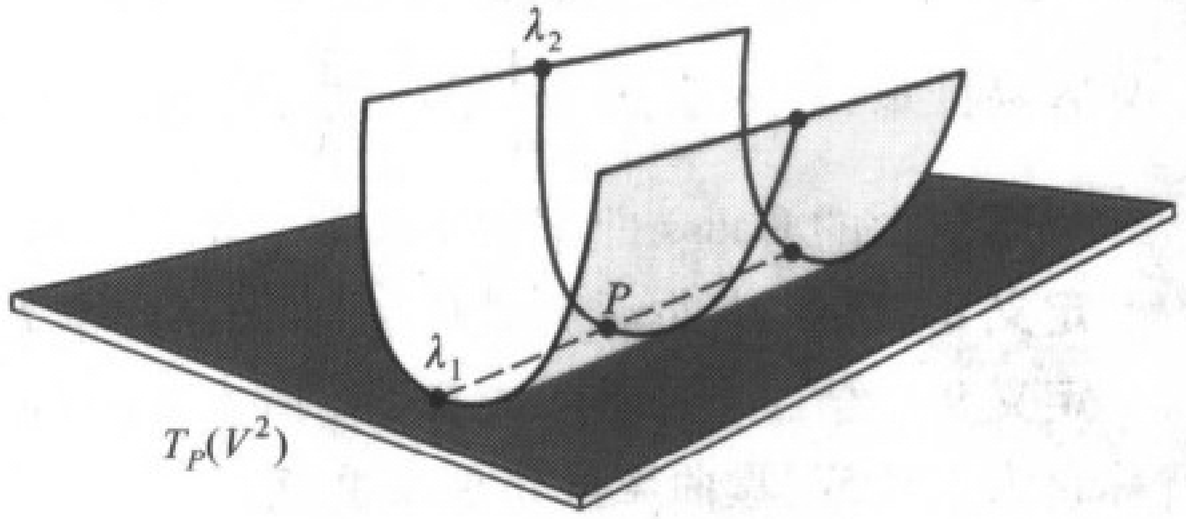


图 4.15

4.2.4 二维曲面的 Gauss 曲率和平均曲率

设曲面 $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ 由 $z=f(x,y)$ 的图的形式给出，(x,y,z) 是 $\mathbf{R}^3$ 的笛卡儿坐标. 设 $f(0,0)=0$，且坐标平面 (x,y) 在点 $(0,0)$ 切于 V^2. 因为

$$\mathfrak{G}\Big|_{(0,0)}=(\delta_{ij})=E, Q\Big|_{(0,0)}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix},$$

所以

$$K=\det Q=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2, H=f_{xx}+f_{yy}=\lambda_1+\lambda_2.$$

要求计算不同于 $(0,0)$ 的点的 K 和 H. 设

$$\mathfrak{G}=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix},$$

这时，直接计算，得

$$H=\frac{1}{g}(GL-2MF+EN);$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

其中 $g=\det \mathfrak{G}$. 若 $z=f(x,y)$，则

$$ds^2=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dy^2.$$

因为 V^2 的向径有形式：$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$，所以

$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx});\boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy});\boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,f_{yy});$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\operatorname{grad}(z-f)}{|\operatorname{grad}(z-f)|}=\frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};$$

由此

$$H=\frac{(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}};$$

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

Gauss 曲率和平均曲率与局部坐标的选择无关.

容易计算,对球面,$K=\frac{1}{R^2}$,$H=\frac{2}{R}$,特别,其 Gauss 曲率和平均曲率都是常数.

二维平面的 Gauss 曲率和平均曲率都等于 0.

定义 8 若二维曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 的 Gauss 曲率 K 是常数,则称它为**常曲率曲面**.

定义 9 若二维曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$,在所有的点的 Gauss 曲率是正的、零或负的时,就称它为**正曲率**、**零曲率**或**负曲率曲面**.

标准的二维球面是正(常数)曲率流形.

练习 由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 给出的曲面(椭球面)$V^2\subset\mathbf{R}^3$,如果半轴 a,b,c 不为 0 和∞,则 V^2 是严格正曲率曲面. 椭球面可以用参数式表示为:

$$x=a\cos\theta\cos\varphi,y=b\cos\theta\sin\varphi,z=c\sin\theta.$$

二维欧氏平面是 0 常曲率流形. 由 $z=x^2-y^2$ 的图像给出的是负曲率流形的例子. 很明显

$$K=\frac{-4}{(1+4(x^2+y^2))^2}<0.$$

在这个例子中,Gauss 曲率是可变的函数. 容易构造出负常曲率流形 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 来. 现在,我们指出这样的曲面. 为此,我们证明命题:在三维欧氏空间中,在局部上存在正常数 Gauss 曲率曲面、零 Gauss 曲率曲面和负常数 Gauss 曲率曲面.

考察平面曲线 γ,它位于第一象限,并具有下列性质:它的切线从切点到切线与 Ox 轴交点之间的线段长是常数 a(图 4.16). 在点 A 沿曲线移动时,点 B 沿 Ox 轴滑动,并且线段 AB 为定长 a. 我们来求曲线 γ 的方程. 从三角形 ABx 中,(图 4.16),有 $\tan\varphi=-y'_x$,这里$y=y(x)$是 γ 的图形;$a\sin\varphi=y$. 由此

$$x'_y=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

其中 γ 是 $x=x(y)$的图. 于是

$$x(y)=-\int_a^y\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2}dy$$

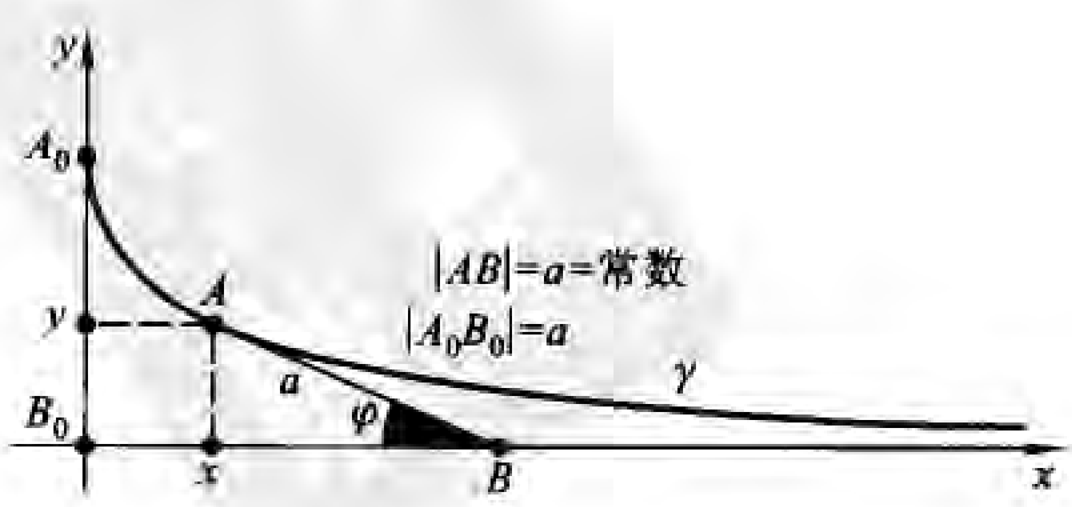


图 4.16

$$= -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right).$$

考虑曲线 γ 绕 Ox 轴旋转得到的旋转曲面(参看图 4.17). 此曲面称为 Beltrami 曲面,或称为伪球面. 现在来求 Beltrami 曲面的 Gauss 曲率. 为此,计算一般形式旋转曲面的 Gauss 曲率(图 4.18).

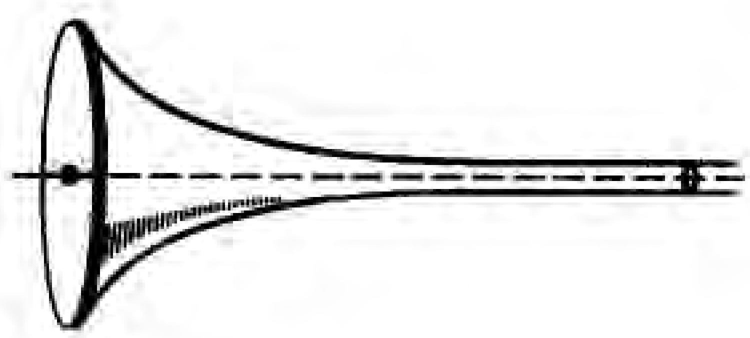


图 4.17

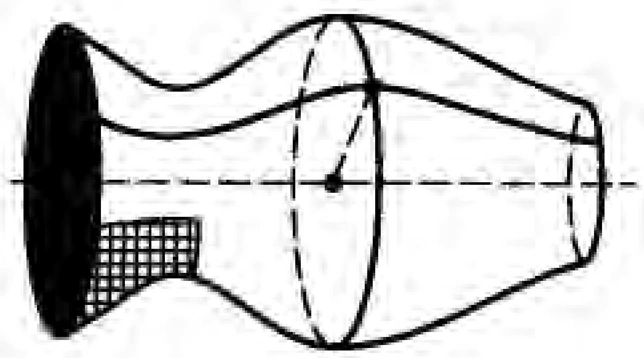


图 4.18

引理 4 在旋转曲面的每一点,主方向,即相应于主曲率 λ_1,λ_2 的方向总可认为与通过这一点的纬线和经线方向是一致的.

附注 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,那么主方向是唯一确定的,并且与纬线和经线的方向重合;如果 $\lambda_1 = \lambda_2$,那么任何方向都是主方向.

证明 $T_P(V^2)$ 的主方向是这样的正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$,在此基下形式 $\mathfrak{G}$ 和 Q 都为对角形. 显然,第一基本形式 $\mathfrak{G}$ 在经线和纬线生成的坐标系 (u,v) 中是对角形的. 要证明在这个坐标系中,第二基本形式 Q 也是对角形的. 应该证明的是 $M = \langle \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$,其中 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是 V^2 的向径,$\boldsymbol{n}$ 是 V^2 的法向量. 考察 $\mathbf{R}^3$ 中的柱面坐标 (r,φ,x);设 V^2 的母线为 $r = r(x)$;这时曲面 V^2 的向径 $\boldsymbol{r}(x,\varphi) = (x, r(x)\cdot\cos\varphi, r(x)\cdot\sin\varphi)$(参看图 4.19). V^2 的法向量

$$\boldsymbol{n} = (r', -\cos\varphi, -\sin\varphi)/\sqrt{1+(r')^2}.$$

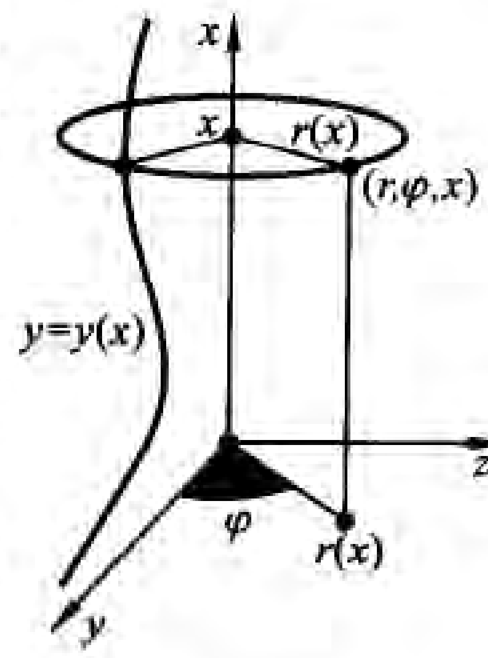


图 4.19

显然,$\langle \boldsymbol{r}_{x\varphi}, \boldsymbol{n}\rangle = 0$. 这就是所要求的. 引理证毕.

引理 5 在柱面坐标下,旋转曲面 V^2 的母线方程为 $r = r(x)$,其 Gauss 曲率 $K(P)$ 的绝对值

$$|K| = \frac{|r''|}{r\cdot(1+(r')^2)^2}.$$

证明 由引理 4,主方向与通过点 P 的经线和纬线的方向一致,所以 $K(P) = \lambda_1\lambda_2$,其中 λ_2 和 λ_1 是相应的平面曲线经线和沿着纬线方向的法截线的曲率. 因为经线与母线相同,所以 $\lambda_2(x) = \dfrac{r''}{(1+(r')^2)^{3/2}}$,这可由 Frenet 公式得到. 现在来求在点 $P(x,r(x))$ 沿着纬线方向的法截线曲率 $\lambda_1(x)$. 纬线圆周的曲率 $k(\theta,\boldsymbol{a})$(沿

纬线的切向量 $\boldsymbol{a}$)显然有 $k(\theta,\boldsymbol{a})=\frac{1}{r(x)}$. 这里的 θ 为 V^2 的法向量与位于纬线平面内的向量 $\boldsymbol{m}$ 之间的夹角(图 4.20). 我们已知

$$k(\theta,\boldsymbol{a})=\frac{1}{\cos\theta}\cdot k(0,\boldsymbol{a}).$$

这里,$k(0,\boldsymbol{a})$ 就是我们感兴趣的曲率 λ_1. 因为在平面 xOr 上,向量 $\boldsymbol{m}$ 有坐标 $(0,1)$,而向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标为 $\frac{1}{\sqrt{1+(r')^2}}(-r',1)$,所以

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+(r')^2}}.$$

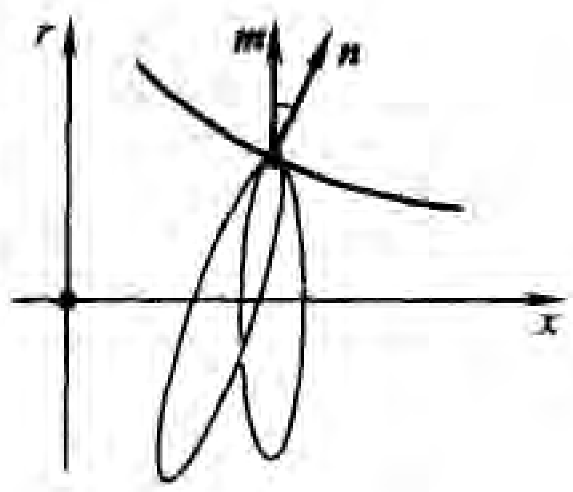


图 4.20

于是,

$$\lambda_1(x)=\frac{1}{r\sqrt{1+(r')^2}}.$$

由此完成证明. 引理证毕.

引理 6 Beltrami 曲面是负常曲率流形.

证明 由于 Beltrami 曲面是旋转曲面,所以可以利用引理 5. 函数 $y=y(x)$ 是前面求得的函数的反函数. 前面已经计算出

$$x'_y=\frac{-\sqrt{a^2-y^2}}{y},\text{由此得 } x''=\frac{a^2}{r^2\sqrt{a^2-r^2}};$$

直接计算得

$$K=-\frac{1}{a^2}.$$

"负号"的出现是由于曲线 $y=y(x)$ 是向下凸的. 引理证毕.

这样,我们表明了在 $\mathbf{R}^3$ 中的正常数 Gauss 曲率、0 曲率、负常数 Gauss 曲率曲面. 球面有正常数曲率,它是紧致的和闭的(不带边)流形;Gauss 曲率为 0 的流形是平面或锥面,锥面为过一点的直线(有限或无限)在任意光滑曲线上滑动而成的. 它是非紧致(无边)的开流形. 我们提出的负常曲率流形是闭流形,因为有边界——圆周(图 4.17). 可以证明(这里不讨论这个问题)Beltrami 曲面不能在保持 $K(P)=-\frac{1}{a^2}<0$ 的条件下向这个圆周外延拓.

通常,补充原来的曲面关于平面 yOz 相对称的部分以完成这个曲面(图 4.21). 这个曲面有一个"折断的圆周",这些折断点由奇点组成.

我们求出 Beltrami"漏斗"上的诱导的黎曼度量. 在 $\mathbf{R}^3$ 中引进柱面坐标 (x,r,φ),这里 $x=x,y=r\cos\varphi,z=r\sin\varphi$(即 Ox 轴是旋转轴);这时母线为 $x=x(r)$ 的旋转曲面上的诱导度量有形式

$$ds^2=(1+(x_r')^2)dr^2+r^2d\varphi^2.$$

在我们的例子中，$x_r'=-\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}$（见前），即

$$ds^2=\frac{dr^2}{r^2}+r^2d\varphi^2.$$

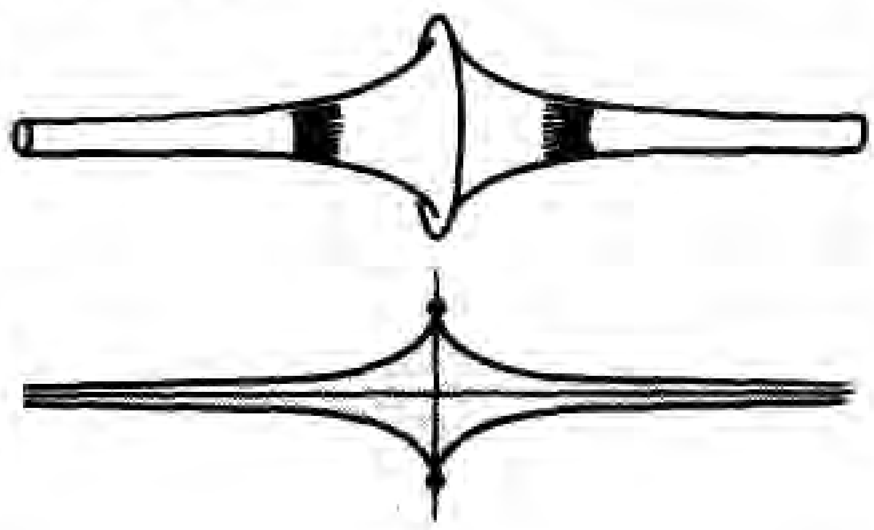


图 4.21

命题 2 外围空间的欧氏度量在 Beltrami 曲面上诱导的黎曼度量是 Лобачевский 度量.

证明 考虑变换 $u=\varphi, v=\frac{1}{r}$，这时

$$ds^2=\frac{v^2}{v^4}dv^2+\frac{du^2}{v^2}=\frac{1}{v^2}(du^2+dv^2)$$

显然已证明了命题. 命题证毕.

这样，Baltrami 曲面与 Лобачевский 平面局部等长，即构造了 Лобачевский 平面的某个区域到三维欧氏空间的等长嵌入. 我们来描述 Лобачевский 平面的怎样的部分才允许在 $\mathbf{R}^3$ 中等长嵌入（作为沿着它的母线剪开的 Beltrami 曲面）（图 4.22）. 在 Лобачевский 平面上所对应的区域表示在图 4.23 中（Poincaré 模型）. 这个区域中用记号 ∞, A_0, B_0 标出，包含在通过绝对形上的一个点 ∞ 的两条平行（在 Лобачевский 几何意义下）直线和弧长为 2π（若 $a=1$）的圆弧（在欧氏意义下，此圆周与绝对形相切于 ∞ 点）A_0B_0 之间.

这样，区域（∞, A_0, B_0）是无限带形，它在两条平行直线之间，并且其一端以弧 A_0B_0 为界.

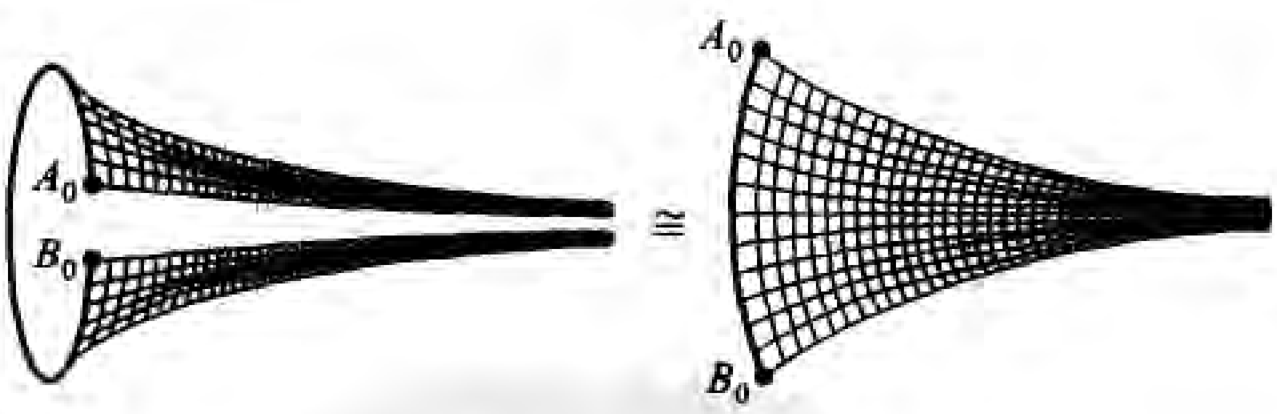


图 4.22

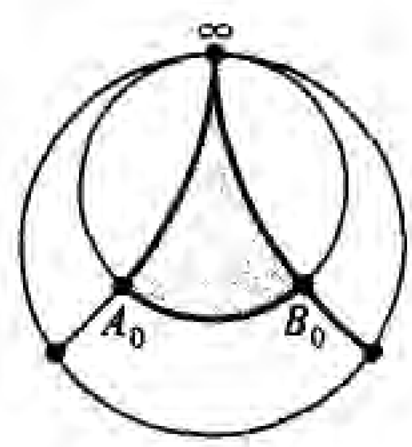


图 4.23

问题 能不能在 $\mathbf{R}^3$ 中不仅将（∞, A_0, B_0）（或与它等距的其他带子）而且是整个 Лобачевский 平面，等距地实现为二维常负曲率曲面的形式呢？答案是否定的（这里不证明）.

现在，考虑曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 的平均曲率. 如上所述，平均曲率决定于嵌入 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 的方式，即取决于第一和第二两个基本形式. 如何求出具有给定常曲率的二维曲面？例如，0 平均曲率曲面——所谓的极小曲面. 这些曲面具有如下的特征性质：它的面积局部地与另外一个曲面（此超曲面与原曲面仅在足够小半径的（任何）球

内部不同)的面积相比较是最小的(参看图 4.24)."肥皂膜"是极小曲面 $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ 的物理模型."肥皂膜"是将金属制成的闭圈从肥皂水中取出而得到的.方程 $H=0$ 称为极小曲面方程.我们求出它的显式形式.因为

$$H=\frac{GL-2MF+EN}{EG-F^2},$$

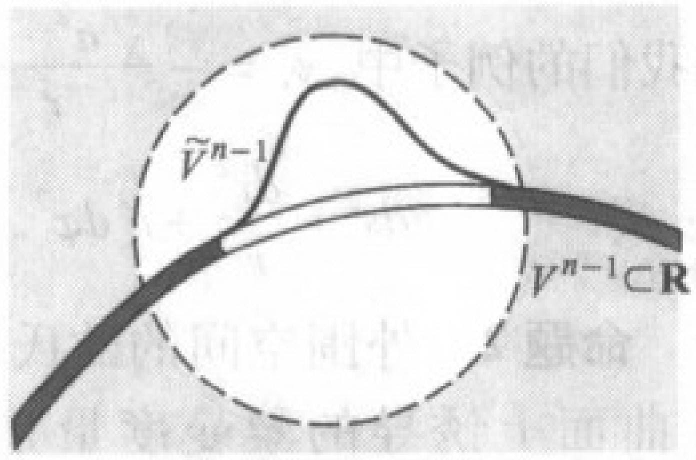


图 4.24

所以方程 $H=0$ 取形式 $GL-2MF+EN=0$.如果曲面由 $z=f(x,y)$ 的图给出,那么(参看前面)

$$ds^2=(1+f_x^2)dx^2+2f_xf_ydxdy+(1+f_y^2)dy^2;$$

$$L=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};M=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}};$$

$$N=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

于是,得到方程

$$(1+f_x^2)f_{xx}-2f_{xy}f_xf_y+(1+f_y^2)f_{yy}=0.$$

这个方程是相当复杂的,解出来并不容易.当然,简单的情形,例如:欧氏平面是极小曲面,因为 $Q=0$.

我们介绍较复杂的非紧致极小曲面的例子.在 $\mathbf{R}^3$ 中,两条于点 O 正交的直线 l_1,l_2.固定直线 l_1,让直线 l_2 以常速 a 沿 l_1 移动,同时以常角速度 ω 绕 l_1 转动(进行螺旋运动).直线 l_2 将扫描出某个二维光滑流形 $V^2 \subset \mathbf{R}^3$,这个曲面称为正螺旋面(参看图 4.25).请证明正螺旋面是极小曲面.顺便指出,任何极小曲面 $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ 都具有非正的 Gauss 曲率,因为 $\lambda_1+\lambda_2=0$.

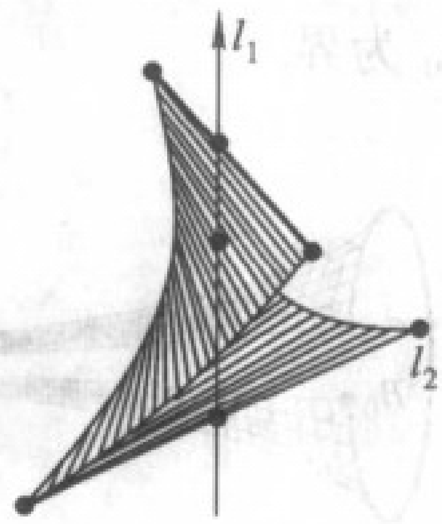


图 4.25

再介绍一个极小曲面的例子.考察光滑曲线 $\gamma(t):y=a\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ 绕轴 Ox 旋转所得到的非紧致曲面.由分析教程知道,这条曲线取固定在两点 A 和 B 的重力悬链的形状(图 4.26),相应的曲面称为悬链曲面(图 4.27).现在来求 H.由引理 5 的证明可知,

$$\begin{aligned}H=\lambda_1+\lambda_2&=\frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}\\&=\left(a\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right)^{-1}\left(1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{a}\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\left(1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}\right)^{-\frac{3}{2}}\\&=0\end{aligned}$$

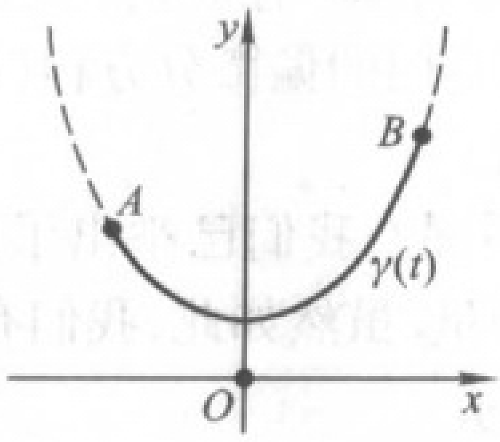


图 4.26

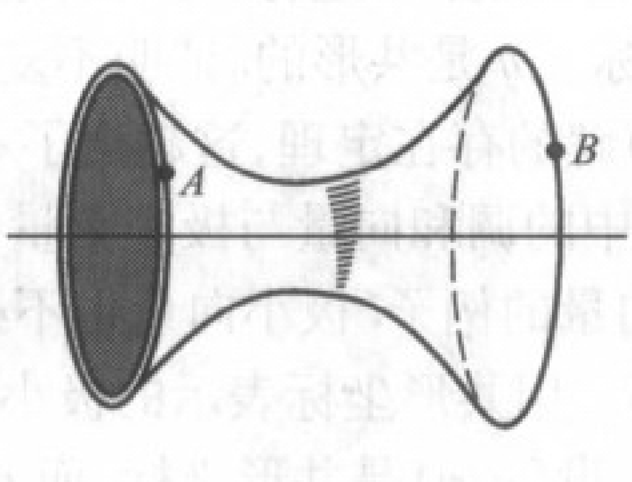


图 4.27

于是，悬链曲面是极小曲面. 如果只考虑由点 A 和 B 绕 Ox 轴旋转所成的两个圆周之间的悬链曲面的部分，那么得到极小曲面的例子，它张在由这两个边界圆周组成的圈 Γ 上.

所谓的调和曲面与极小曲面是紧密联系的.

定义 10　向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$，称 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 关于坐标 u,v 是**调和的**，如果$\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial v^2}=0$，即 $\Delta\boldsymbol{r}=0$，其中 Δ 是在坐标 u,v 中的 Laplace 算子.

关于坐标(u,v)是调和的向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$，关于另外的坐标(u',v')不一定是调和的.

定义 11　如果曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 在某个曲线坐标(u,v)下，可用某个调和的向径函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 给出，则称曲面 V^2 是**调和的**.

如果向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 相应的曲面的平均曲率恒等于 0，则说向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是**极小的**. 因为平均曲率在曲面上的坐标变换下是不变的，于是，如果向径关于一个坐标系是极小的，那么它关于任何另外的正则坐标系也是极小的. 对于调和曲面却不是这样，所以通常说到调和映射是指

$$\boldsymbol{r}:D(u,v)\to\mathbf{R}^3(x,y,z),$$

其中 $D(u,v)$ 是平面(u,v)上的区域，而 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是定义曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 的映射. 映射 $\boldsymbol{r}$ 在一个坐标下是调和的，在另外的坐标下，一般说，它已不再是调和的（举例！）. 例如，由公式

$$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,x^2-y^2),$$

x,y,z 是 $\mathbf{R}^3$ 的笛卡儿坐标，给出的调和曲面，即在笛卡儿坐标系下，由图像 $z=x^2-y^2$ 给出的曲面 V^2. 很明显，曲面是调和的，同时它不是极小的：$H=0$ 仅在点$(0,0)$成立，而其他的点 $H\neq0$.

注意，如果曲面 $V^2\subset\mathbf{R}^3$ 上的曲线坐标(u,v)使得外围欧氏度量在 V^2 上的诱导度量 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 是共形欧氏的，即 $E=G,F=0$，则称此曲线坐标是**共形的**.

附注　考虑二维光滑黎曼流形，其黎曼度量 ds^2 有实解析系数 E,F,G，它们都是局部坐标 u,v 的函数. 可以证明，对任何点 P，存在邻域 $U=U(P)$，在 U 中可以

引进坐标 p,q(是原来坐标 u,v 的实解析函数),使得 ds^2 有形式:$\lambda(p,q)(dp^2+dq^2)$,即坐标 p,q 是共形的. 证明不复杂,但要引用专门的偏微分方程(Beltrami-Laplace 方程)解的存在定理,这超出了本教程的范围.

在 $\mathbf{R}^3$ 中的调和向量与极小向量有怎样的关系呢? 我们已举出了调和向量但不是极小向量的例子. 极小向量也不必须是调和向量. 虽然如此,我们有下面命题:

命题 3 用共形坐标表示的极小向量是调和的.

证明 设(u,v)是共形坐标,而$\boldsymbol{r}(u,v)$是描述极小曲面的向量. 注意,$E=G=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle \boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle$,$F=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle$. 要证明的是 $\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}=0$. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}$. 因为 $H=0$,所以

$$GL-2MF+EN=0,\text{即 } L+N=0.$$

由此得到$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle=\langle \boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle+\langle \boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=L+N=0$,其中 $\boldsymbol{n}$ 是 V^2 的法向量. 剩下的就是要证明$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_v\rangle=0$,因为这时 $\boldsymbol{a}$ 与相互正交的向量 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 的数量积为 0,即 $\boldsymbol{a}$ 应该为 0 向量. 将等式 $E=G,F=0$ 微分,得到

$$\langle \boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle \boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_v\rangle,\langle \boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle \boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_v\rangle,$$
$$\langle \boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_v\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_{uv}\rangle,\langle \boldsymbol{r}_{vu},\boldsymbol{r}_v\rangle=-\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_{vv}\rangle,$$

由此得到

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle \boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_v\rangle-\langle \boldsymbol{r}_{vu},\boldsymbol{r}_v\rangle=0.$$

类似地,可得

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{r}_v\rangle=0.$$

命题证毕.

习　题

1. 证明:$\mathbf{R}^3$ 中的曲面,如果它的 Gauss 曲率和平均曲率恒等于 0,则为平面.

2. 设曲面 S 由曲线的切线组成,用曲线的曲率和挠率来表示该曲面的 Gauss 曲率和平均曲率.

3. 在上一题中,证明:曲面的度量仅依赖于曲线的曲率.

4.3 变换群

4.3.1 变换群的简单例子

这里我们将研究度量变换群的主要例子,即流形上保持度量的映射组成的群. 考察具有度量 g_{ij}的黎曼流形 M^n.

定义 1 流形 M^n 到自身的微分同胚 f 称为黎曼度量 g_{ij}的运动或等距变换,如果黎曼度量在该映射下变为自身,即满足恒等式

$$g_{kp}(y)=g_{ij}(x(y))\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p},$$

其中 $y^1,\cdots,y^n$ 是点 $y\in M^n$ 的某个邻域的局部坐标；$x^1,\cdots,x^n$ 是点 $x\in M^n$ 的某个邻域的局部坐标；$x^i=x^i(y^1,\cdots,y^n)$，$1\leqslant i\leqslant n$，是局部给出映射 f 的函数，其中 $x=f(y)$.

我们已给出了等距变换的"坐标的"定义. 有时，不利用局部坐标而用不变的定义是方便的. 在映射 f 下，微分 df 把 $T_y(M^n)$ 映射到 $T_x(M^n)$，这个映射是同构. 在切空间 $T_y(M^n)$ 和 $T_x(M^n)$ 中，由黎曼度量定义了数量积 $\langle,\rangle_y$，和 $\langle,\rangle_x$，例如，$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_y=g_{ij}(y)a^ib^j$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_y(M^n)$.

定义 2 流形 M^n 到自身的微分同胚 f 称为等距变换，如果对 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_y(M^n)$，有 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_y=\langle df(\boldsymbol{a}),df(\boldsymbol{b})\rangle_x$，其中

$$x=f(y).$$

引理 1 等距变换的坐标的定义和不变的定义是等价的.

证明 设 $\boldsymbol{a}\in T_y(M^n)$，在局部坐标 $y^1,\cdots,y^n$ 下

$$\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^n),$$

由此，$df(\boldsymbol{a})\in T_x(M^n)$ 有形式

$$(df(\boldsymbol{a}))^i=\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}a^k,$$

因为 $df:T_y(M^n)\to T_x(M^n)$ 是由 Jacobi 矩阵给出的. 由此

$$\langle df(\boldsymbol{a}),df(\boldsymbol{b})\rangle_x=g_{ij}(x(y))=\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k}\frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p}a^kb^p=g_{kp}a^kb^p.$$

引理证毕.

引理 2 黎曼流形 M^n 的所有等距变换的集合构成群(在代数的意义下).

证明 由"复合函数的微分法则"和"在坐标变换时系数 g_{ij} 的变换规则"知等距变换的合成仍是等距变换. 由 f^{-1} 的 Jacobi 矩阵是 Jacobi 矩阵 $J(f)$ 的逆矩阵知 f^{-1} 是等距变换. 取恒等变换作为群的单位元. 引理证毕.

黎曼流形 M^n 的等距变换群通常由映射空间提供拓扑结构，并用 $\mathrm{Iso}(M^n)$ 来表示. 考察简单的例子.

例 1 取具有欧氏度量 $ds^2=dx^2$ 的实直线作为 M^1，这里 x 是直线上的坐标. 设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 到自身的微分同胚，就是说，它由严格单调增加(或减少)的函数 $x=f(y)$ 给出. 因为保持度量，所以 $ds^2=(f'_y)^2dy^2=dy^2$，即 $(f'_y)^2=1$. 也就是 f 具有形式 $f(y)=y+a$，或 $f(y)=-y+b$，a,b 是任意的常数. 于是，实直线的等距变换群同胚于一对直线(保持直线的方向的正常等距变换及改变直线方向的非正常等距变换).

例 2 考察二维欧氏平面并求出保持坐标原点 O 的等距变换群. 我们将在平面线性变换中寻求等距变换(可以证明平面的任意等距变换都是线性的，现在我们将不研究). 度量 dx^2+dy^2，$g_{ij}=\delta_{ij}$ 的不变性的要求，可写为矩阵方程 $E=AA^T$，其中 $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是线性变换. 这就是正交群的定义，即在现在情况下是群 $O(2)$，它由

矩阵$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$(正常旋转)和矩阵$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$(非正常旋转,或反射)组成. 正常旋转构成$O(2)$的子群,用$SO(2)$表示;非正常旋转不构成子群. 子群$SO(2)$是$O(2)$中的正规因子. $O(2)$由矩阵组成,那么就是拓扑空间. 每一个这样的正常的矩阵对应于旋转角φ. 这样生成$O(2)$的那些矩阵的集合同胚于圆周的两个样本,于是$O(2)$是光滑的一维闭(不连通的)流形(图4.28).

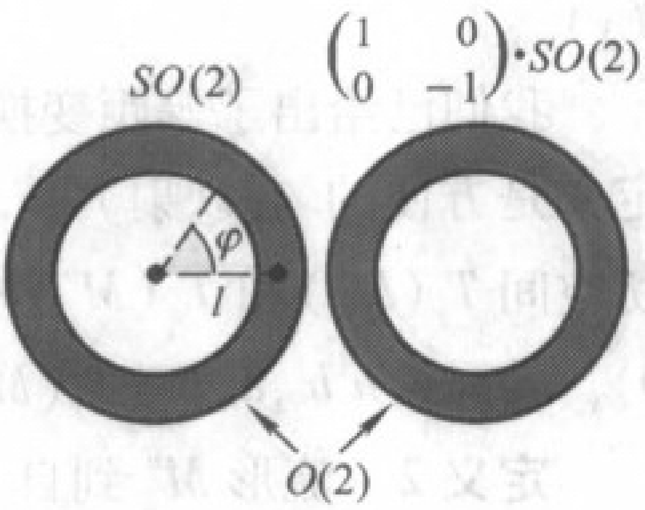


图4.28

试证明:群$O(2)$与具有度量$ds^2 = d\varphi^2$的圆周上的所有等距变换群相同. 提示:类似于群$\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^1)$进行证明.

例3 欧氏平面的等距变换(或运动——译注)可写为形式:$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$,这里$A \in O(2)$,向量$\boldsymbol{b}$定义了平面上的平行移动(平移). 显然,所有这样的变换都保持欧氏度量(验证!). 进一步将指出,它们概括了平面的所有等距变换. 这个群可以写成矩阵的形式:

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \boldsymbol{b} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

于是,群$\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^2)$可以转化为同胚于一对圆周与欧氏平面直积的拓扑空间,从而这个群是光滑的三维流形(非紧致的和非连通的——两个连通分支).

例4 考虑在$\mathbf{R}_1^2$上给出的不定度量$-dx^2 + dy^2$. 第一基本形式B是常量,并有形式

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是,保持这个度量的所有线性齐次变换满足方程

$$B = ABA^{\mathrm{T}},$$

其中$A: \mathbf{R}_1^2 \to \mathbf{R}_1^2$是线性变换,表示为$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,得到$a,b,c,d$的方程组:

$$a^2 - b^2 = 1; ac = bd; d^2 - c^2 = 1.$$

解这个方程组,得到

$$A = \begin{pmatrix} \pm\operatorname{ch}\varphi & \pm\operatorname{sh}\varphi \\ \pm\operatorname{sh}\varphi & \pm\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix},$$

或者

$$A=\begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix},$$

其中$\dfrac{b}{a}=\beta,\beta=\text{th }\varphi$;并且,下面符号的组合是容许的:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}\in\mathfrak{G}_1;\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}\in\mathfrak{G}_2;\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}\in\mathfrak{G}_3;\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}\in\mathfrak{G}_4.$$

这里提供了所有可能的方案. 例如,$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$属于 $\mathfrak{G}_1$,因为用 $-\psi$ 代替 ψ 时,把$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$变为$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$(注意,$\text{sh}(-\psi)=-\text{sh }\psi,\text{ch}(-\psi)=\text{ch }\psi$). 从而,$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2\cup\mathfrak{G}_3\cup\mathfrak{G}_4$(验证!)并且 $\mathfrak{G}_i\cap\mathfrak{G}_j=\varnothing,i\neq j$. 实际上,例如假定 $\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2\neq\varnothing$,这时

$$\text{ch }\varphi=-\text{ch }\psi,\text{sh }\varphi=-\text{sh }\psi,$$

这是不可能的,因为对任意的 φ,$\text{ch }\varphi>0$. 类似地,可得

$$\mathfrak{G}_i\cap\mathfrak{G}_j=\varnothing,i\neq j,$$

成立.

因为群 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathbf{R}_1^2$ 的齐次等距变换群,所以它的变换把实半径或虚半径的伪圆周

$$\{-x^2+y^2=1\}\cup\{-x^2+y^2=-1\}$$

变为自身. 考察单位正交标架

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1).$$

这时,在等距变换 A 的作用下,这个标架变为如图 4.29 所表示的那样. 我们不是引用通常的欧氏旋转角 φ,而是引用双曲旋转角 ψ,假设 $\beta=\text{th }\psi$(参看上面);同时群 $\mathfrak{G}$ 变为双曲旋转群. 双曲旋转群由四个连通分支组成. 这就是集合 $\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_3,\mathfrak{G}_4$,如上面所述的那样.

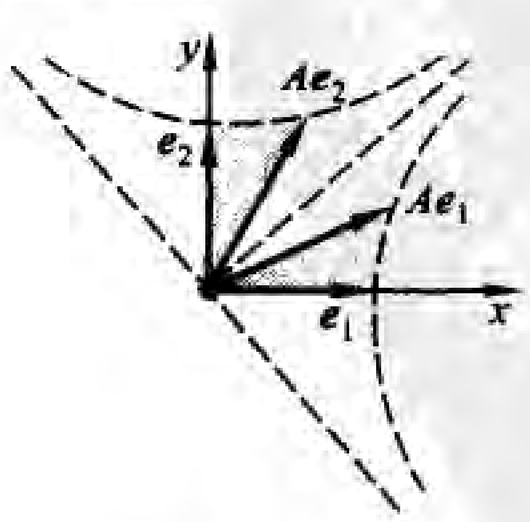


图 4.29

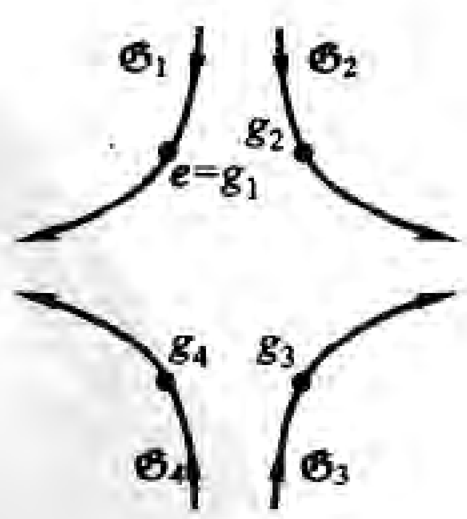


图 4.30

群 $\mathfrak{G}$ 实现为矩阵群,所以可以把群 $\mathfrak{G}$ 放入所有矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$($a,b,c,d \in \mathbf{R}$)的四维实欧氏空间中,从而继承了它的拓扑. 每一个子集 $\mathfrak{G}_i$,$1 \leqslant i \leqslant 4$,关于这个拓扑是道路连通的(证明!).

这四个连通分支中,只有 $\mathfrak{G}_1$ 是子群(验证!). 群 $\mathfrak{G}$ 是四维矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$空间中的子集合;同时每一个 $\mathfrak{G}_i$,$1 \leqslant i \leqslant 4$,都同胚于实直线(图 4.30). 这个同胚(例如,$\mathfrak{G}_1$)是由每一个矩阵$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$与角 ψ 的值之间的对应建立起来的. 这个相互单值的对应也是连续的(验证!). 群 $\mathfrak{G}$ 把虚半径的伪圆周 $-x^2+y^2=-1$ 变为自身. 在图 4.31 中指出了四个变换——$\mathfrak{G}_1$,$\mathfrak{G}_2$,$\mathfrak{G}_3$,$\mathfrak{G}_4$ 的代表的作用. 类似的事情也发生在实半径的伪圆周上.

群 $\mathfrak{G}$ 是可交换的(验证!). 子群 $\mathfrak{G}_1$ 是 $\mathfrak{G}$ 的正规因子. 于是,确定了商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$,它的阶数等于 $\mathfrak{G}$ 的连通分支数,即等于4. 因为 $\mathfrak{G}$ 是可交换的,所以 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ 也是可交换的. 仅存在两个 4 阶可交换群:$Z_2 \oplus Z_2$,Z_4. 哪一个群才同构于 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ 呢? 我们构造 g_1,g_2,g_3,g_4 的乘法表,得到 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ 同构于 $Z_2 \oplus Z_2$. 在这里,伪圆周旋转群不同于通常的圆周旋转群(对此,相应的商群同构于 Z_2).

例 5 考察标准嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中的二维球面,球面上带有 $\mathbf{R}^3$ 的由嵌入诱导的度量. 首先,考察 $\mathbf{R}^n$,并求出保持欧氏度量 $ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ 的线性齐次变换 A 构成的群. 因为矩阵 (g_{ij}) 的形式为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

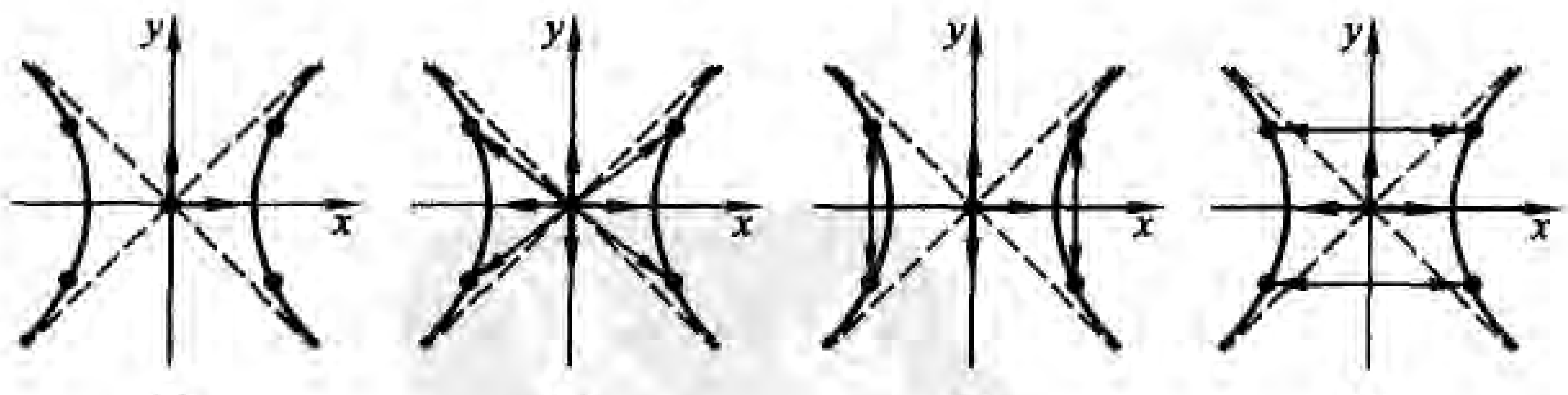


图 4.31

(a) $g_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是恒等变换; (b) $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是关于坐标原点的反射;①

(c) $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是关于轴 Ox 的反射; (d) $g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是关于轴 Oy 的反射.

① 原文"отражение"应译为"反射",这里应是"对称"的意思. ——译注.

所以有:$E=AA^{\mathrm{T}}$;方程 $E=AA^{\mathrm{T}}$ 的解是正交矩阵,它们构成群 $O(n)$. $O(n)$ 中包含了由正常(行列式 $=+1$)旋转组成的子群 $SO(n)$;子群 $SO(n)$ 是 $O(n)$ 的正规因子,并且商群 $O(n)/SO(n)$ 同构于 $\mathbf{Z}_2$.

设 $n=3$;这时 $O(3)$ 保持 $\mathbf{R}^3$ 的欧氏度量;于是,球面变为自身. 这样,$O(3)$ 是 $ISO(S^2)$ 的子群. 下面要证明

$$O(3)\equiv ISO(S^2).$$

考察 $SO(3)\subset O(3)$. 因为 $SO(3)$ 包含在所有具有实系数的 (3×3) 矩阵空间中,所以它配上诱导的拓扑,就成为拓扑空间.

引理 3 作为拓扑空间的群 $SO(3)$ 同胚于三维射影空间 RP^3.

证明 设 A 为 $SO(3)$ 的元素;这时在 $\mathbf{R}^3$ 中存在不动轴 $l(A)$,即 A 在 $\mathbf{R}^3$ 中的作用归结为绕轴 $l(A)$ 旋转某个角 $\varphi(A)$. 若 $A\neq E$,则 $l(A)$ 是唯一确定的. 考虑垂直于轴 $l(A)$ 的平面 $\Pi(A)$,$\Pi(A)$ 通过点 O;在 $\Pi(A)$ 上取任意向量 $\boldsymbol{e}_1$,将 $\boldsymbol{e}_1$ 在平面 $\Pi(A)$ 上旋转 $\varphi(A)$ 角,得 $\boldsymbol{e}_2$(参看图 4.32). 补充向量 $\boldsymbol{e}_3$,与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 一起构成标架 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,使标架 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 的定向与标架 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 的定向一致,这里 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中某个预先固定的标架. 若以 $\boldsymbol{e}_3$ 为直线 $l(A)$ 的方向,则 $l(A)$ 就成为实数轴并且可放置一个值 $\varphi(A)$. 这样每一个 $A\in SO(3)$ 与 $\mathbf{R}^3$ 中的点单值地对应,此点以 $P(l,\varphi)$ 表示. 显然,$P(l,\pi)=P(l,-\pi)$,因为绕 $l(A)$ 旋转 π 和 $-\pi$ 是相同的. 如果 $|\varphi(A)|<\pi$,那么 $P(l,\varphi)$ 对应一个且仅仅一个旋转 A. 在 A 连续改变时,$P(l,\varphi)$ 连续变动;反之也成立.

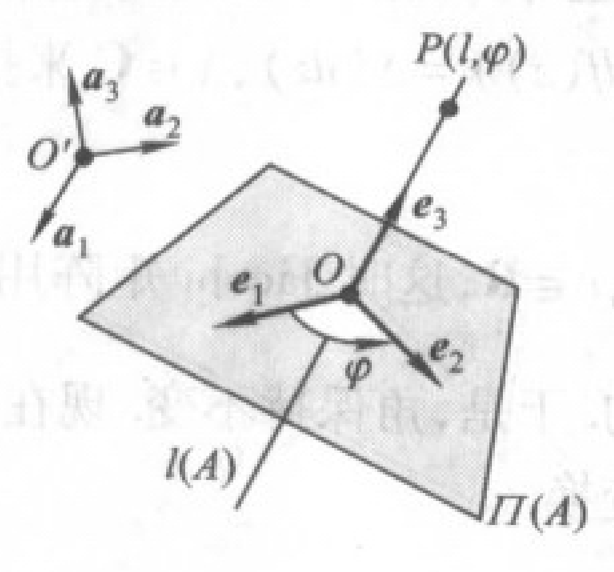


图 4.32

于是在正交变换 A 与半径为 π 的三维球中的点之间建立了一对一的且连续的对应,这里,在球的边界(即半径为 π 的球面上)上,把对径点 $P(l,\pi)$ 和 $P(l,-\pi)$ 粘合在一起. 剩下的是要证明这个"球(在边界上粘合的球)"同胚于 RP^3. RP^3 的一个定义是把它实现为 $\mathbf{R}^4$ 中通过 O 点的直线束;这个模型与下面的模型是等价的:取 S^3,并把它的对径点视为一点. 为此,应该取半球面 S^3_+,并在其边界(即在赤道 S^2 上)上,把对径点视为一点(参看图 4.33). 半球面微分同胚于三维圆盘:用垂直射影可以实现 S^3_+ 到 D^3 的微分同胚(参看图 4.33). 于是把边界上的对径点视为同一点时,RP^3 同胚于 D^3. 引理证毕.

因为 RP^3 是道路连通的,所以 $O(3)$ 由两个道路连通的分支组成.

例 6 考察 Лобачевский 平面的等距变换群. 考虑 Лобачевский 平面在具有度量 $\frac{(dz)(d\bar{z})}{(z-\bar{z})^2}$① 的上半平面的实现. 在复平面的分式线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 中来寻找这

① 由于文中有"d"和作为微分的"dz",译文中凡作为微分用时都加括号. ——译注

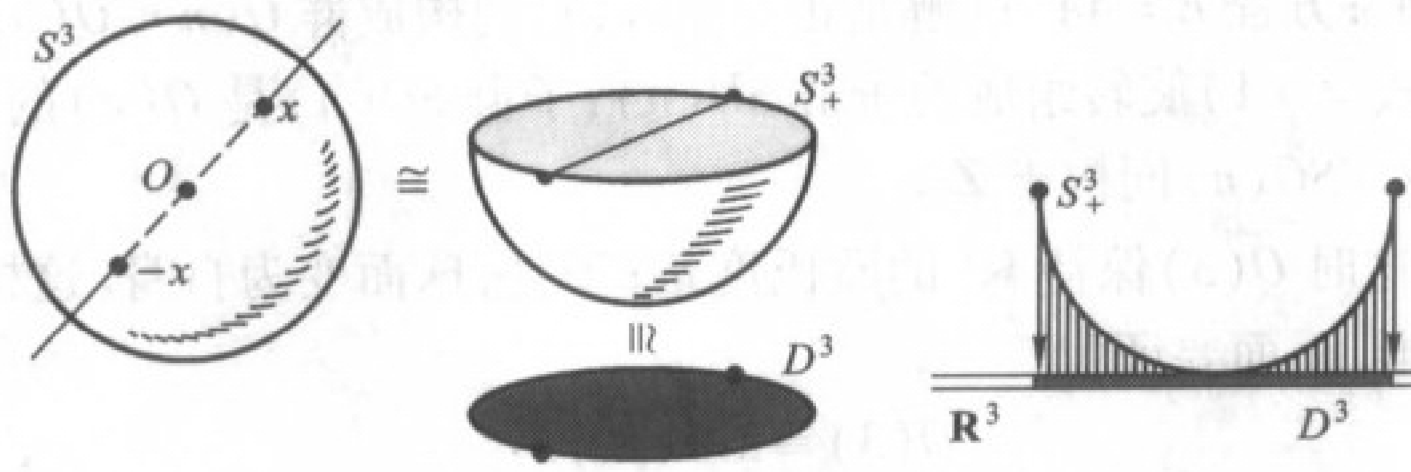


图 4.33

个度量的等距变换群,这里 $a,b,c,d\in\mathbf{C}$. 因为 $(dw)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}(dz)$(验证!),所以

$$(dw)(d\bar{w})=\frac{|ad-bc|^2}{|cz-d|^4}(dz)(d\bar{z}).$$

总之,这是欧氏度量乘以变数量因子,即分式线性变换是共形的. 这些变换保持相交直线夹角的余弦;剩下的要验证它还保持角的方向.

我们证明 Jacobi$J$ 是正的. 事实上,$(dw)=\lambda(z)(dz)$;$\lambda(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$;$T_z(\mathbf{R}^2)=\mathbf{R}^2$;$T_w(\mathbf{R}^2)=\mathbf{R}^2$(参看图 4.34). 于是,映射 $f:z\to w$ 的微分(df)的作用可用$(df(z))=\lambda(dz)$,$\lambda\in\mathbf{C}$ 来描述. 设

$$\lambda=u+\mathrm{i}v,$$

$u,v\in\mathbf{R}$,这时 Jacobi 矩阵用实数表示为$\begin{pmatrix}u & v\\ -v & u\end{pmatrix}$,即 Jacobi 等于 u^2+v^2,确实是正的. 于是,角保持不变. 现在,我们从所有分式线性变换中选出上半平面变为自身的变换.

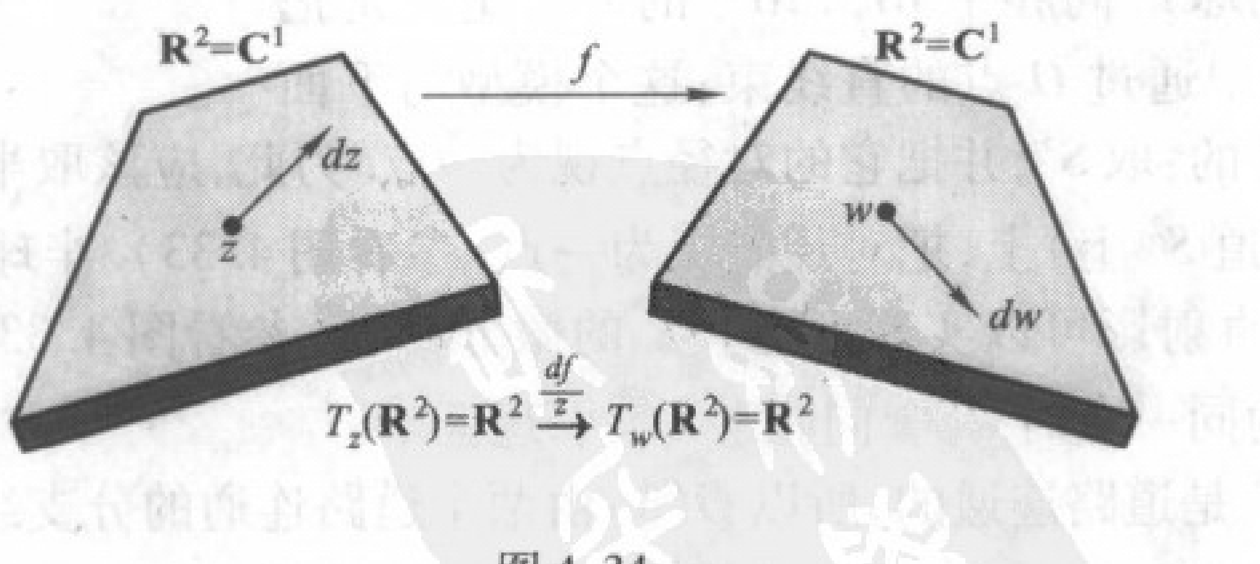


图 4.34

引理 4　变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$,当且仅当$(a,b,c,d)=\rho(a',b',c',d')$,$a',b',c',d'\in\mathbf{R}$,$\rho\in\mathbf{C}$,$\rho\neq 0$ 时,把上半平面变为自身;即当所有的系数(a,b,c,d)与四实数组

(a',b',c',d') 成比例，此外，还有 $ad-bc>0$ 时变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 把上半平面变为自身.

证明是不难的，我们把它留给读者(或参看复分析教程).

引理 5 任何变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

$a,b,c,d\in\mathbf{R},ad-bc>0$，都是 Лобачевский 平面的等距变换.

证明 我们有

$$(dw)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}(dz);\frac{(dw)(d\bar{w})}{(w-\bar{w})^2}=\frac{(dz)(d\bar{z})}{(z-\bar{z})^2},$$

这就是所要求的.

因为 $ad-bc>0$，所以可以假定 $ad-bc=1$. 引理证毕.

命题 1 Лобачевский 平面的等距变换群 $ISO(L_2)$ 含有同构于群 $SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 的子群，这里 $SL(2;\mathbf{R})$ 是行列式为 $+1$ 的实系数 (2×2) 矩阵群，$\mathbf{Z}_2$ 是由变换 E 和 $-E$ 构成的子群，$SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 为 $SL(2;\mathbf{R})$ 关于 $\mathbf{Z}_2$ 的商群.

证明 由引理 5，这是等距变换. 它们的全体构成群. 实际上，实系数的分式线性变换并且行列式等于 1 的变换的合成仍是同一类型的变换. 因为 $ad-bc\neq0$，所以存在相同类型的逆变换.

现在考虑矩阵群 $SL(2;\mathbf{R})$，即下列矩阵构成的群：$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $ad-bc=1$. 作映射

$$\varphi:SL(2;\mathbf{R})\to\mathfrak{G}_1,$$

$\mathfrak{G}_1$ 是变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$，$a,b,c,d\in\mathbf{R},ad-bc=1$ 构成的群. 设 $\varphi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{az+b}{cz+d}$. 显然 φ 是同态(验证!)，并且 φ 是满同态. 我们来求 $\operatorname{Ker}\varphi$. 显然 $\varphi(g)=\varphi(-g)$，因此

$$\operatorname{Ker}\varphi\supset\mathbf{Z}_2=(E,-E).$$

可以证明 $\operatorname{Ker}\varphi=\mathbf{Z}_2$. 设 $\varphi(g)=\varphi(g')$，即

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

由此，得

$$\frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}=\lambda;\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=\mu;\frac{a+b}{c+d}=\frac{a'+b'}{c'+d'};$$

$$b=\lambda b',d=\lambda d';a=\mu a',c=\mu c'$$

由此，$\mu=\lambda,g'=\lambda g$，从而有 $\lambda=\pm1$，这就是所要求的. 命题证毕.

练习 证明：$SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 是连通的拓扑空间.

不应该认为变换 $SL(2;R)/\mathbf{Z}_2$ 包含了全部$ISO(L_2)$. 事实上,看映射 $g_0:z\to-\bar{z}$,这个映射把上半平面变为自身,并保持 Лобачевский 度量(这是关于轴 Oy 的反射). 同时,g_0 不能写成$\frac{az+b}{cz+d}$的形式. 实际上,变换$\frac{az+b}{cz+d}$是共形的(参看上面),即保持有向的角. 映射$g_0:z\to-\bar{z}$不是共形的(参看图 4.35).

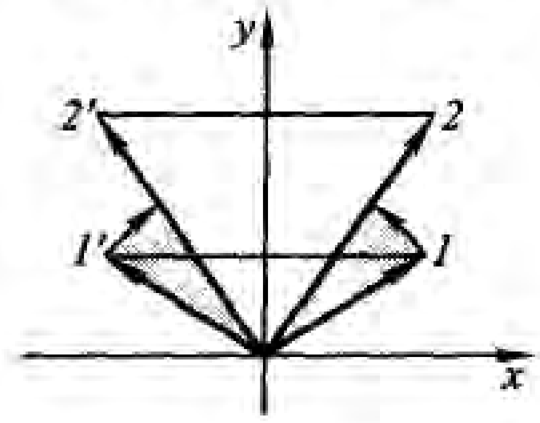


图 4.35

于是,还应该研究变换 $g(z);w=g(z)=-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R},ad-bc=1$. 换句话说,应研究变换 $w=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},a,b,c,d\in\mathbf{R},ad-bc=-1$. 所有这些变换的集合记为 $\mathfrak{G}_2$. 集合 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 是同胚的,因为任意的 $g\in\mathfrak{G}_2$,有 $g=g_0f,f\in\mathfrak{G}_1$,且 g_0,f 都是等距变换,所以 g_0f 也是等距变换. 用 $g_0\in\mathfrak{G}_2$ 乘集合 $\mathfrak{G}_1$ 的方法可建立此同胚. 其次,$\mathfrak{G}_1\cap\mathfrak{G}_2=\varnothing$. 事实上,第一类型保持有向角,而第二类型不保持有向角.

引理 6 集合 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2$ 构成群,其中 $\mathfrak{G}_1$ 是它的子群.

证明 考察所有行列式等于 ±1 的实(2×2)矩阵的全体所构成的群$L(2;\mathbf{R})$. 此群有两个连通分支:$L(2;\mathbf{R})=L_1\cup L_2$,其中

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},ad-bc=1\right\},$$

$$L_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},ad-bc=-1\right\}.$$

子群 L_1 表示为 $SL(2;\mathbf{R})$. 作出映射 $\varphi:L\to\mathfrak{G}$ 如下:

$$若 A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in L_1,则 \varphi(A)=f\in\mathfrak{G}_1,$$

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},ad-bc=+1;$$

$$若 B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in L_2,则 \varphi(B)=g\in\mathfrak{G}_2,$$

$$g(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},ad-bc=-1.$$

显然,φ 是同态(验证!). 其次,φ 是满同态,φ 不是双方单值的,并且有核. 为了求它的核,找到群 $\mathfrak{G}$ 的单位元素的原像即可. 和命题 1 中的证明一样,证明 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_2=(+E,-E)$. 引理证毕.

实际上是证明了下面的引理.

引理 7 群 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\cup\mathfrak{G}_2$ 同构于 $L(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$，其中

$$L(2;\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, ad-bc=\pm 1\right\}, \mathbf{Z}_2=(E,-E).$$

于是，在 Лобачевский 平面的等距变换群中提出了由两个道路连通分支组成的子群，即 $\mathfrak{G}\cong L(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$. 这个群的元素用几个参数来描述呢？很明显，元素 $g\in\mathfrak{G}$由三个独立参数给出.

引理 8 群 $SL(2;\mathbf{R})$，作为拓扑空间，同胚于圆周与欧氏平面的直积，因此是三维光滑非紧致流形. 相应地，$L(2;\mathbf{R})$同胚于两个相同圆周与欧氏平面的直积.

证明 由代数教程知道，平面上任何行列式为 $+1$ 的线性齐次变换可以唯一地表示为正常旋转与三角形矩阵的变换的合成(关于基的正交化定理). 于是，任何矩阵 $g\in SL(2;\mathbf{R})$允许(唯一地)表示为矩阵的乘积

$$g=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \dfrac{1}{\alpha}\end{pmatrix}.$$

因为旋转的全体构成圆周，而行列式为 1 的三角形的矩阵构成欧氏平面. 引理证毕.

我们将指出，子群 $L(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 完全囊括了整个的群 $ISO(L_2)$.

例 7 回到欧氏平面的运动群上来. 我们求出的变换 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}, A\in O(2), \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^2$，可以写为复数形式 $w=az+b, a\in\mathbf{C}, b\in\mathbf{C}, |a|=1$，即 $w=e^{i\varphi}\cdot z+b$. 这个群同构于由形如$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的矩阵组成的群，其中 $a=e^{i\varphi}$.

容易验证：欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的线性等距变换群 $ISO(\mathbf{R}^n)$与变换 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ 构成的群是同构的，这里 A 是正交矩阵，而向量 $\boldsymbol{b}$ 给出位移. 群 $ISO(\mathbf{R}^n)$同构于由形如

$$\left(\begin{array}{c|c}A & \boldsymbol{b}\\ \hline 0\cdots 0 & 1\end{array}\right)$$

的矩阵构成的矩阵群. 于是群 $ISO(\mathbf{R}^n)$作为拓扑空间，同胚于直积 $O(n)\times\mathbf{R}^n$.

4.3.2 矩阵的变换群

所有研究的群的例子原来都不仅是拓扑空间，而且还是光滑流形. 其拓扑是将变换群嵌入到矩阵群后产生的，而矩阵群的拓扑用通常的方式定义：如果两矩阵的逐个元素是邻近的，那么就认为此两个矩阵是邻近的. 这样，自然地产生某一类光滑流形，它上面的点可以“相乘”，而且这个乘法满足代数群的所有公理.

定义 3 光滑流形 M^n 称为李群，如果在它上面给定了两个光滑映射

$$f: M^n\times M^n\to M^n\text{(乘法)},$$

$$\nu: M^n\to M^n\text{(取逆元素)},$$

通常表示为

$$f(x,y)=x\cdot y,$$
$$\nu(x)=x^{-1},$$

同时,存在点 e(单位)$\in M^n$,与映射 f,ν 一起满足关系式

(1) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$;

(2) $e\cdot x=x\cdot e=x$;$xx^{-1}=x^{-1}x=e$.

通常要求运算 f 和 ν 是连续的,但在涉及到的所有具体的例子中,群的运算是光滑的,因此在李群的定义中就采用了光滑映射 f 和 ν.

定义 4 李群 $\mathfrak{G}$ 中能用连续的路径与群 $\mathfrak{G}$ 的单位元素相连接的元素 g 的集合称之为群 $\mathfrak{G}$ 的单位连通分支,并表示为 $\mathfrak{G}_0$.

命题 2 集合 $\mathfrak{G}_0$ 是 $\mathfrak{G}$ 的子群,此外,$\mathfrak{G}_0$ 是 $\mathfrak{G}$ 的正规因子,所以确定了商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$

证明 设 $g_1,g_2\in\mathfrak{G}_0$,要证明 $g_1\cdot g_2\in\mathfrak{G}_0$. 由 $\mathfrak{G}_0$ 的定义,存在连续的路径 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$,使 $\gamma_1(0)=e,\gamma_1(1)=g_1$ 和 $\gamma_2(0)=e,\gamma_2(1)=g_2$. 考察路径 $\gamma(t)=\gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)$. 由 $\mathfrak{G}$ 的乘法运算的连续性,路径 $\gamma(t)$ 是连续的,显然,g_1g_2 与单位元相连接.

我们证明对任何 $g_0\in\mathfrak{G}_0$ 和任意的 $g\in\mathfrak{G}$,元素 gg_0g^{-1} 属于 $\mathfrak{G}_0$. 因为 $g_0\in\mathfrak{G}_0$,所以存在连续路径 $\gamma(t)$,使 $\gamma(0)=e,\gamma(1)=g_0$. 考虑新的路径 $\varphi(t)=g\gamma(t)g^{-1}$,它是连续的;同时 $\varphi(0)=e,\varphi(1)=gg_0g^{-1}$,即 $gg_0g^{-1}\in\mathfrak{G}_0$. 命题证毕.

我们将研究矩阵群的基本的例子. 所有这些群都是李群,但是除某些特例外,我们将不证明这一事实.

4.3.3 完全线性群

考察欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^n$ 到自身的非退化的线性齐次变换,即所有实系数的非退化$(n\times n)$矩阵的集合. 这个集合表示为 $GL(n;\mathbf{R})$. 对 $GL(n;\mathbf{C})$ 也类似地给予定义.

引理 9 集合 $GL(n;\mathbf{R})$ 和 $GL(n;\mathbf{C})$ 是李群.

证明 考察集合 $GL(n;\mathbf{R})$. 集合 $GL(n;\mathbf{R})$ 构成群(在代数意义下)的事实是显然的,我们将 $GL(n;\mathbf{R})$ 附上光滑流形的结构,并使所有群的运算都是光滑的. 显然,$GL(n;\mathbf{R})=\mathbf{R}^{n^2}\setminus\{g:\det(g)=0\}$,这里的欧氏空间 $\mathbf{R}^{n^2}$ 与所有 n 阶矩阵(在域 $\mathbf{R}$ 上)的空间是一致的. 因为方程 $\det(g)=0$ 是多项式的方程,所以集合 $\mathbf{R}^{n^2}\setminus\{g:\det(g)=0\}$ 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的开集,即是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的区域,所以是 n^2 维的光滑流形. 因为矩阵 AB 的每一个元素都是矩阵 A 和 B 的元素的二阶多项式,所以矩阵的乘法是光滑运算. 逆矩阵 A^{-1} 的每一个元素都是矩阵 A 的元素的有理函数(由于 A 的非退化性,分母不等于 0). 用类似的方法可证明 $GL(n;\mathbf{C})$ 是李群. 引理证毕.

4.3.4 特殊线性群

$SL(n;\mathbf{R})$为$GL(n;\mathbf{R})$中由方程$\det(g)=1$确定的子集合，显然，这个集合是群并且是拓扑空间. 实际上，$SL(n;\mathbf{R})$是光滑流形，这里不去证明它. 群$SL(n;\mathbf{C})$为$GL(n;\mathbf{C})$中满足关系式$\det(g)=1$的子群. $SL(n;\mathbf{R})$的维数等于n^2-1，而$SL(n;\mathbf{C})$的维数等于$2n^2-2$.

4.3.5 正交群

考察$\mathbf{R}^n$，具有欧氏的双线性形式$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sum_{i=1}^{n}a^ib^i$. 群$O(n;\mathbf{R})$为保持这个数量积的$n$阶实矩阵$A$构成的群，即对任意的$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$，满足关系式：$\langle A\boldsymbol{a},A\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 通常把群$O(n;\mathbf{R})$表示为$O(n)$. 群$O(n;\mathbf{C})$可类似地定义. 群$O(n)$包含子群$SO(n)$，$SO(n)$称为特殊正交群：如果$\det(g)=1$，则$g\in SO(n)$.

引理 10 群$SO(n)$是道路连通的，并且与群$O(n)$的单位连通分支重合. 商群$O(n)/SO(n)$同构于$\mathbf{Z}_2$，即$O(n)$由两个连通分支组成.

证明 由代数教程知道，对任意元素$g_0\in SO(n)$，存在正交变换$g\in O(n)$，使$a=gg_0g^{-1}$是如下形式的矩阵：

若$n=2k$是偶数，则为

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc}
\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & & & \\
-\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \multicolumn{2}{c}{0} \\
\hline
 & & \ddots & & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & & \cos\varphi_k & \sin\varphi_k \\
 & & & -\sin\varphi_k & \cos\varphi_k
\end{array}\right)$$

若$n=2k+1$为奇数，则为

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc|c}
\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & & & & \\
-\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \multicolumn{3}{c}{0} \\
\hline
 & & \ddots & & & \\
\hline
 & & & \cos\varphi_k & \sin\varphi_k & 0 \\
\multicolumn{2}{c|}{0} & & -\sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0 \\
\cline{4-6}
 & & & \multicolumn{2}{c|}{0} & 1
\end{array}\right)$$

作为连接g_0和单位矩阵E的连续道路$\gamma(t)$，在一套对角线上的矩阵中，将角变量乘以参数t，于是，$SO(n)=(O(n))_0$. 因为行列式为-1的正交矩阵的集合同

胚于 $SO(n)$. 引理证毕.

有时,把 $O(n)$ 表示为 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的子集是方便的. $O(n)$ 由方程组 $AA^{\mathrm{T}}=E$ 确定. 这里 $\mathbf{R}^{n^2}$ 是 n 阶矩阵 A 的线性空间.

在 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中考察形式 $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle = \mathrm{tr}AB^{\mathrm{T}}$. 显然,在 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中取基向量 $\boldsymbol{e}_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$(除第 i 行,第 j 列的元素为 1 外,其他元素为 0)时,这个数量积是欧氏的. 如果, $\boldsymbol{A} = \sum\limits_{i,j} a_i^j \boldsymbol{e}_{ij}$, $\boldsymbol{B} = \sum\limits_{i,j} b_i^j \boldsymbol{e}_{ij}$,那么

$$\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i,j} a_i^j b_i^j,$$

很明显,这个数量积与欧氏数量积是一致的. 把矩阵 $A\in\mathbf{R}^{n^2}$ 与向量 $\boldsymbol{A} = \sum\limits_{i,j} a_i^j \boldsymbol{e}_{ij}$ 等同时,可以把它与向量 $\mathbf{A}$ 的欧氏长度相对应,这时 $\|A\|^2 = \mathrm{tr}AA^{\mathrm{T}}$. 于是,对 $A\in O(n)$,有 $\|A\| = \sqrt{n}$,即 $O(n)$ 位于半径为 $\sqrt{n}$ 的标准球面 $S^{n^2-1}\subset\mathbf{R}^{n^2}$ 上.

4.3.6 酉群和特殊酉群

考察复空间 $\mathbf{C}^n$,其坐标为 $z^1,\cdots,z^n$,并附上 Hermite 数量积: $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \mathrm{Re}\sum\limits_{i=1}^{n} a^i\,\overline{b^i}$,其双线性复值形式为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i\,\overline{b^i}$. 用 $U(n)$ 表示 $\mathbf{C}^n$ 中保持坐标原点和这个数量积的所有线性算子的群,即所有使 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \equiv \langle A\boldsymbol{a},A\boldsymbol{b}\rangle$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^n$ 的 n 阶复值矩阵 A 构成的群. 这个条件等价于矩阵方程 $A\,\overline{A}^{\mathrm{T}}=E$,其中字母上的横线表示复共轭. 由此,若 $g\in U(n)$,则 $\det(g)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. 定义 $U(n)$ 中使 $\det(g)=1$ 的所有 g 的集合作为子群 $SU(n)$.

引理 11 群 $U(n)$ 和群 $SU(n)$ 是道路连通的.

证明 考察 $SU(n)$;由代数教程知道,对每一个 $g_0\in SU(n)$,存在酉变换 $g\in U(n)$,使 $a=gg_0g^{-1}$ 是如下形式的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} & & & 0 \\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \end{pmatrix};\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n=2l\pi;l\in\mathbf{Z}$$

(其中, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$, $1\leqslant k\leqslant n$,是算子 g_0 的特征值). 作为连接 g_0 和 E 的连续路径只要取连续的矩阵簇 $\gamma(t)=g^{-1}a(t)g$,这里

$$a(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{n-1}t} & \\ 0 & & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l\pi-\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k t)} \end{pmatrix},$$

显然，$\gamma(0)=E,\gamma(1)=g_0$. $U(n)$的连通性可类似地证明. 引理证毕.

练习 证明：$U(n)$（作为拓扑空间）同构于 $SU(n)$与 S^1 的直积.

练习 $\mathfrak{G}$ 是连通李群，H 是它的离散正规子群（对于子群 H，若群 $\mathfrak{G}$ 的单位元有开邻域 U，使得在 U 中仅包含 H 的一个元素——单位元，则称 H 是 $\mathfrak{G}$ 的离散子群）. 证明：任何离散正规子群 H 都在 $\mathfrak{G}$ 的中心之中，即 H 与整个群 $\mathfrak{G}$ 可交换.

有时，把 $U(n)$ 表示为 $\mathbf{R}^{2n^2}$ 中由线性方程组 $A\overline{A}^{\mathrm{T}}=E$ 所确定的子集合，这里 $\mathbf{R}^{2n^2}\cong\mathbf{C}^{n^2}$，它与所有的 n 阶复值矩阵 A 所构成的线性空间等同. 在 $\mathbf{C}^{n^2}$ 中，考察由矩阵 E_{kj}，I_{kj}所组成的基，这里基的元素除第 k 行、第 j 列的一个元素外，全部等于 $0(1\leqslant k,j\leqslant n)$. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n^2}$，那么，$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}A\overline{B}^{\mathrm{T}}=\sum_{i,j=1}^{n}a_i^j\overline{b_i^j}$，这与 $\mathbf{C}^{n^2}$中的 Hermite 数量积一致. 把每个矩阵 A 与向量等同时，可以求出向量 $\boldsymbol{A}$ 的欧氏长度：$\|\boldsymbol{A}\|^2=\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}A\overline{A}^{\mathrm{T}}$. 于是 $U(n)$位于半径为$\sqrt{n}$的球面 S^{2n^2-1}上.

引理 12 群 $GL(n;\mathbf{R})$由两个道路连通分支组成；群 $GL(n;\mathbf{C})$是道路连通的.

证明 群 $GL(n;\mathbf{R})$分解为两个子集合

$$\mathfrak{G}_0=\{g:\det g>0\},\mathfrak{G}_1=\{g:\det g<0\}$$

的并. 因为矩阵的行列式是它的系数（即在 $\mathbf{R}^{n^2}$中的坐标）的光滑函数，所以这两个子集是不相交的. 其次，$\mathfrak{G}_1$ 同胚于 $\mathfrak{G}_0$.

我们证明 $\mathfrak{G}_0$ 的连通性. 因为每一个元素 $g\in\mathfrak{G}_0$，可以解释为在 $\mathbf{R}^n$ 中的某个基，利用已知的化基为单位正交的过程，得到 g 可表示为 $g=\alpha\cdot\varphi,\alpha\in SO(n)$，$\varphi$ 是上三角形矩阵，在主对角线上为正的特征数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$. 现在，矩阵 g 沿着道路 $\gamma(t)=\alpha\cdot\varphi(t)$可连续地变为矩阵 α，其中

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1t+(1-t) & & \\ & \varphi_2t+(1-t) & & \varphi_{ij}t\\ & & \ddots & \\ & 0 & & \varphi_nt+(1-t)\end{pmatrix}.$$

剩下的就是引用 $SO(n)$的连通性. 对 $GL(n;\mathbf{R})$，引理证毕. $GL(n;\mathbf{C})$连通性的证明留给读者.

附注 $GL(n;\mathbf{C})$的连通性和 $GL(n;\mathbf{R})$的不连通性，还可这样解释（非严格）：群 $GL(n;\mathbf{R})$可用从 $\mathbf{R}^{n^2}$中删去超曲面

$$\det(g)=0$$

而得到，$\det(g)=0$ 分 $\mathbf{R}^{n^2}$为两部分. 在复的情况下，$GL(n;\mathbf{C})$由 $\mathbf{C}^{n^2}\cong\mathbf{R}^{2n^2}$ 删去子集 $\det(g)=0$ 而得到，$\det(g)=0$ 的余维数等于 2（从实的观点来看），因为复方程 $\det(g)=0$ 等价于两个实方程：

$$\mathrm{Re}(\det(g))=0,\mathrm{Im}(\det(g))=0.$$

归纳起来，很明显，“余维数为 2”的曲面不把 $\mathbf{R}^{2n^2}$ 分为两部分. 任何两个非特殊点

可用"绕过"特殊点集合的道路连接.

我们已把 $U(n)$ 定义为保持实值数量积 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k$ 的矩阵群. 但是,除此以外,在 $\mathbf{C}^n$ 中有与之有关的双线性复值形式 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k$,因此很自然地产生保持这个形式不变的矩阵群 $U(n)'$,即满足恒等式 $\langle B\boldsymbol{a}, B\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^n$ 的 B 构成的群.

引理 13 群 $U(n)$ 和群 $U(n)'$ 是同一个群.

证明是不困难的,留给读者.

我们讨论使 $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{R}^{2n}$ 一致的"实化"的算子. 在 $\mathbf{C}^n$ 中选择 Hermite 基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,考察正交(关于 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$)向量的集合: $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\mathrm{i}\boldsymbol{e}_n$. 这时,任何向量 $z\in\mathbf{C}^n$ 有分解式: $z = \sum_{k=1}^{n} x^k\boldsymbol{e}_k + \sum_{k=1}^{n} y^k(\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k)$, $z^k = x^k + \mathrm{i}y^k$. 这使得 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^{2n}$ 一致. 映射 $\varphi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}^{2n}$, $\varphi(z) = (x^1,\cdots,x^n;y^1,\cdots,y^n)$,称为 $\mathbf{C}^n$ 的实化算子. 容易验证, $\mathbf{C}^n$ 中的 Hermite 数量积在实化后,转变为 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的欧氏数量积.

"在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中给予复结构"包含什么意义? 考察实化 $\varphi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}^{2n}$,这时 $\mathbf{R}^{2n}\cong\mathbf{R}^n\oplus \mathrm{i}\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$. 于是,在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中出现线性算子 A, $A(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\boldsymbol{x}$. 显然, $A^2 = -E$, $A(\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k) = -\boldsymbol{e}_k$,即在正交基 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k;\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1,\cdots,\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k)$ 中,矩阵 A 有形式 $A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$,而且 $A\in SO(2n)$.

定义 5 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的正交算子 $A\in SO(2n)$,若 $A^2 = -E$,则说 A 定义了 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的复结构.

容易验证,这样的算子借助于基的正交旋转,变为形式 $A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

于是,产生某个正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$,使 $A(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{t}_k$; $A(\boldsymbol{t}_k) = -\boldsymbol{e}_k$. 张在 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 上的空间记为 $\mathbf{R}^n\{\boldsymbol{e}_k\}$,得到分解 $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n\{\boldsymbol{e}_k\}\oplus\mathbf{R}^n\{\boldsymbol{t}_k\}$. 于是,任何 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^{2n}$ 有唯一的分解形式

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\{\boldsymbol{e}_k\}.$$

因为 $A^2 = -E$,如果我们考虑向量 $\{\boldsymbol{e}_k\}$ 的所有的复线性组合时,得到 $\mathbf{C}^n$.

酉群在实化 $\varphi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}^{2n}$ 下,发生怎样的变化? 设 $A\in U(n)$,因为它保持 Hermite 形式,所以在实化后它转化为作用在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上并且保持欧氏形式的算子 φA. 即它是群 $O(2n)$ 的元素.

命题 3 在实化 $\varphi:\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}^{2n}$ 之下产生的单同态

$$\varphi: U(n)\to SO(2n)$$

可表示为

$$A = C + \mathrm{i}B \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix} \in SO(2n),$$

其中 C 和 B 都是实的. 此外,$\varphi(U(n)) = SO(2n) \cap \varphi(GL(n;\mathbf{C}))$.

证明 设 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的基;由此

$$(C+\mathrm{i}B)\boldsymbol{e}_k = C\boldsymbol{e}_k + B(\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k);$$
$$(C+\mathrm{i}B)(\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k) = -B\boldsymbol{e}_k + C(\mathrm{i}\boldsymbol{e}_k),$$

即 $\varphi(A) = \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}$. 直接计算可得 $\det(\varphi(A)) = |\det A|^2$,即 $\det(\varphi(A)) > 0$. 现设 $\varphi(A) \in \varphi(U(n))$,一方面 $\varphi(A) \in SO(2n)$,另一方面 $\varphi(A)$ 是复的非退化算子的实化得到的;由此,$\varphi(U(n)) \subset SO(2n) \cap \varphi(GL(n;\mathbf{C}))$. 反之,设 $g \in SO(2n)$, $g \in \varphi(GL(n;\mathbf{C}))$. 这意味着 g 有形式$\begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}$,即 $g \in \varphi(U(n))$. 命题证毕.

4.3.7 非紧致辛群和紧致辛群

如果在线性空间 L^{2n} 中给出双线性反对称非退化的数量积$\langle , \rangle$,即对任何一对向量,有$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = -\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,并且对任意的 $\boldsymbol{a}$,当且仅当 $\boldsymbol{b}=0$ 时$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = 0$,则说在线性空间 L^{2n} 中给出**线性辛结构**. 具有这样结构的空间称为**辛空间**. 可以很方便地在欧氏空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 上实现辛空间. 如果辛空间到自身的线性变换保持辛结构,则称为**辛变换**. 所有保持坐标原点的辛变换全体称为**实(非紧致)辛群**,并表示为 $Sp(n,\mathbf{R})$. 可以证明,线性辛变换的行列式等于1.

借助于四元数代数 $\boldsymbol{Q}$ 来定义紧致辛群. 考察 $\mathbf{R}^4$,取单位正交基,其向量表示为 $1,i,j,k$;于是任意的 $q \in \mathbf{R}^4$ 可表示为

$$q = a^0 \cdot 1 + a^1 i + a^2 j + a^3 k,$$

$a^0,a^1,a^2,a^3 \in \mathbf{R}$. 定义 $\mathbf{R}^4$ 中的乘法:先对基 $1,i,j,k$ 之间定义,然后按照线性性质再延拓到 $\mathbf{R}^4$ 中的所有向量. 乘法表为

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

这就产生 $\mathbf{R}$ 上的四维代数,它满足结合律但不满足交换律. 也称为四元数代数 $\boldsymbol{Q}$. 在 $\boldsymbol{Q}$ 中,有共轭运算

$$q \to \bar{q} = a^0 \cdot 1 - a^1 \cdot i - a^2 \cdot j - a^3 \cdot k,$$

并有取(不等于0的)元素之逆的运算

$$q^{-1} = q/|q|^2, |q|^2 = q \cdot \bar{q} = \sum_{i=0}^{3}(a^i)^2.$$

在 Q 中有实值数量积

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \mathrm{Re}(q_1 \cdot \bar{q}_2),$$

其中 $q_1 \cdot q_2$ 表示 Q 中的乘积. 元素 $q \in Q$ 称为四元数；$a^0 = 0$ 的四元数称为虚数，在分解式 $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$ 中 a^0 表示为 $a^0 = \mathrm{Re}(q)$；于是 $q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q)$.

现在考察 n 维四元数的空间 Q^n，其基为 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，任何向量 $\boldsymbol{a} \in Q^n$ 可表示为

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} q^k \boldsymbol{e}_k, q^k \in Q.$$

定义 6　紧致辛群 $Sp(n)$ 是 Q^n 中所有保持原点 O，以及保持以下数量积不变的四元素线性变换的集合：

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} a^k b^k\right),$$

空间 Q^n 可与 $\mathbf{C}^{2n}$ 作典型的等同. 设 $n = 1$，这时 $Q^1 = Q$；令 $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$，利用乘法表，$q$ 可以写成形式

$$q = (a^0 + a^1 \cdot i) + j(a^2 - a^3 \cdot i) = z^1 + j\bar{z}^2,$$

这里 $z^1 = a^0 + a^1 \cdot i, z^2 = a^2 + a^3 \cdot i$ 是复数. 沿着 Q^n 中每一个四元数坐标实现这个运算时，得到等同式 $Q^n \cong \mathbf{C}^{2n}$. 也像复数的情形一样，在定义 $Sp(n)$ 的同时，也定义了使四元数值形式

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k \bar{b}^k; a^k, b^k \in Q$$

不变的群.

断言"使 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 不变的群与群 $Sp(n)$ 一致"是正确的. 这个断言的证明留给读者.

在 Q^n 与 $\mathbf{C}^{2n}$ 等同时，四元数形式 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 将发生什么？设 $n = 1$，这时

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{b} &\to (p + j\bar{q})\overline{(c + j\bar{d})} \\ &= (p\bar{c} + q\bar{d}) + (-pd + qc)j; \end{aligned}$$

这里，利用了关系式 $jq = \bar{q}j, j^2 = -1, \overline{a \cdot b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$(验证！). 对任意的 n，形式 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ 化为

$$\sum_{k=1}^{n}(p^k \bar{c}^k + q^k \bar{d}^k) + \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)j,$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a^1, \cdots, a^n) \to (p^1 + j\bar{q}^1, \cdots, p^n + j\bar{q}^n); \\ \boldsymbol{b} &= (b^1, \cdots, b^n) \to (c^1 + j\bar{d}^1, \cdots, c^n + j\bar{d}^n). \end{aligned}$$

显然，形式 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle_H = \sum_{k=1}^{n}(p^k \bar{c}^k + q^k \bar{d}^k)$ 与 $\mathbf{C}^{2n}$ 中的 Hermite 形式一致；而形式

$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_A = \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)$ 是反对称的，即

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_A = -\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle_A.$$

如果算子 $A:\boldsymbol{Q}^n\to\boldsymbol{Q}^n$ 保持 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_Q$，那么在 $\boldsymbol{Q}^n$ 等同于 $\mathbf{C}^{2n}$ 以后，它保持两个形式：$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_H$ 和 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_A$. 算子保持 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_H$，就是说它是酉算子. 我们证明了 $Sp(n)$ 可以嵌入在 $U(2n)$ 中作为保持 $\mathbf{C}^{2n}$ 中反对称形式 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_A = \sum_{k=1}^{n}(q^k c^k - p^k d^k)$ 的子群.

命题 4 群 $GL(n;\mathbf{R})$, $GL(n;\mathbf{C})$, $SL(n;\mathbf{R})$, $SL(n;\mathbf{C})$ 是非紧致的；群 $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ 是紧致的.

证明 按照上面所指出的方式进行.

注意，我们没有列举出所有的李群.

考虑低维数的某些李群. 我们看到，$SO(2)$ 同胚于圆周；$SO(3)$ 同胚于 RP^3. 显然，$U(1)\cong S^1$. 我们研究 $Sp(1)$ 和 $SU(2)$.

命题 5 群 $SU(2)$ 和 $Sp(1)$（在代数意义下）是同构的，且二者都同胚于球面 S^3. 群 $SO(3)$ 是 $SU(2)$ 关于子群 $Z_2=(E,-E)$ 的商群.

证明 群 $Sp(1)$ 在 $\boldsymbol{Q}^1=\boldsymbol{Q}$ 中的作用是乘以四元数，即每一个 $A\in Sp(1)$ 有形式 $Aq=q\cdot\bar{a}$，而 $a\in\boldsymbol{Q}$ 是固定的四元数. 因为 $\langle q_1,q_2\rangle_F=q_1\cdot\bar{q}_2$ 在 A 的作用下保持不变，所以

$$q_1\bar{q}_2=q_1\bar{a}a\bar{q}_2=|a|^2q_1\cdot\bar{q}_2,$$

由此 $|a|=1$. 因为 $|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$（验证！），所以 $Sp(1)$ 同构于所有四元数 $a\in\boldsymbol{Q}$，$|a|=1$ 的群，这些四元数构成了球面 S^3. 我们证明 $Sp(1)$ 同构于 $SU(2)$. 考察嵌入 $Sp(1)\to U(2)$（参看上面）. 因为 $n=1$，所以嵌入有形式：$\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p}\end{pmatrix}$，而且 $p\bar{p}+q\bar{q}=1$. 这由直接计算即可验证.

于是，$Sp(1)$ 同构于 $U(2)$ 中幺模子群，而且它的维数等于 3. 因为 $SU(2)$ 也是三维的，所以 $Sp(1)$ 与 $SU(2)$ 同构.

现在来证明存在满同态 $f:SU(2)\to SO(3)$，并且有同构于 $\mathbf{Z}_2$ 的核. 我们把 $SU(2)$ 实现为 $\boldsymbol{Q}$ 中单位四元数的群；设 $f(a)=aq\bar{a}$，$|a|=1$，$\mathrm{Re}(q)=0$，即虚四元数，它们构成与 $1\in\boldsymbol{Q}$ 正交的子空间 $\mathbf{R}^3\subset\mathbf{R}^4$. 因为

$$f(a_1\cdot a_2)=a_1a_2q\bar{a}_2\bar{a}_1=f(a_1)\cdot f(a_2),$$

从而 f 是同态. 变换 $f(a)$ 把 $\mathbf{R}^3$（虚四元数）变为自身，并且因为 $\mathrm{Re}(aq_1\bar{a}a\bar{q}_2\bar{a})=\mathrm{Re}(aq_1\bar{q}_2\bar{a})=\mathrm{Re}(q_1\bar{q}_2)$，从而 $f(a)$ 是等距变换. 于是 $f(a)\in SO(3)$（由于 S^3 的连通性，像 $f(S^3)$ 在 $SO(3)$ 中）.

我们来求 f 的核. 如果对任意的 $q\in\mathbf{R}^3$（$\mathrm{Re}(q)=0$）有 $aq=qa$，$|a|=1$，即 $a=\pm1$，因为 a 与所有的虚四元数可交换，也就是 a 的虚数部分等于 0. 因为

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathbf{Z}_2=(E,-E),$$

那么 $\dim(S^3/\mathbf{Z}_2)=3$,并且因为 $\dim SO(3)=3$,所以 f 为满同态. 命题证毕.

$SO(3)\cong S^3/\mathbf{Z}_2$ 的事实对应于 RP^3 表示为商的形式 $S^3/\mathbf{Z}_2$,其中 $\mathbf{Z}_2$ 作用在 S^3 上的作用是向量乘以 -1.

习　题

1. 证明:$O(2)$ 与圆周(度量为 $ds^2=d\varphi^2$)的所有等距变换构成的群相同.
2. 证明:群 $SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 是道路连通的.
3. 证明:群 $U(n)$(作为拓扑空间)同胚于 $SU(n)$ 与圆周的直积.
4. 设 $\mathfrak{G}$ 是连通李群,H 是离散正规子群(如果,群 $\mathfrak{G}$ 的单位元有开邻域 U,使得在 U 中只有子群 H 的一个元素——单位元,则称子群 H 为离散的.)证明:任何离散正规子群 H 在群 $\mathfrak{G}$ 的中心之中,即与整个群 $\mathfrak{G}$ 可交换.

4.4 动力系统

我们已经熟悉向量场 $\boldsymbol{v}(x)=\operatorname{grad} f(x)$($f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数). 实际上,在曲线坐标中 grad 不是向量场,因为这时有另外的变换规则,并且仅在具有黎曼度量时才能把 grad 解释为场.

注意,在欧氏空间有等式:

$$\frac{df}{d\boldsymbol{a}}=\langle \boldsymbol{a},\operatorname{grad} f\rangle,$$

其中 $\frac{df}{d\boldsymbol{a}}$ 是方向导数,$\langle\ ,\ \rangle$ 是欧氏数量积. 若 $\{f=c\}$ 是光滑流形,则水平超曲面 $\{f=c\}$ 的维数等于 $n-1$.

定义 1　若 $\operatorname{grad} f(x_0)=0$,则称点 $x_0\in\{f=c\}$ 为函数 f 的临界点;反之,则称 x_0 为非奇(非临界或正则)点.

引理 1　设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数,$x_0\in\{f=c\}$ 是非奇点. 则向量 $\operatorname{grad} f(x_0)$ 在点 x_0 垂直于超曲面 $\{f=c\}$,即 $\operatorname{grad} f(x_0)$ 垂直于 $\{f=c\}$ 在点 x_0 的任何切向量 $\boldsymbol{a}$.

证明可由关系式 $\langle \boldsymbol{a},\operatorname{grad} f\rangle=\frac{df}{d\boldsymbol{a}}$ 得出.

我们称在光滑流形 M^n 上给出了光滑向量场 $\boldsymbol{v}(P)$,如果在每一点 $P\in M^n$ 给定向量 $\boldsymbol{v}(P)\in T_P(M^n)$,$\boldsymbol{v}(P)$ 光滑地依赖于 P.

定义 2　向量场 $\boldsymbol{v}(P)$,若 $\boldsymbol{v}(P_0)=0$,$P_0\in M^n$,这时称 P_0 为向量场 $\boldsymbol{v}(P)$ 的**奇点**. 奇点 $P_0\in M^n$,如果存在 P_0 的开邻域 U,在 U 中,除点 P_0 外,无其他的奇点,则称 P_0 为**孤立奇点**.

但是,不连续场在物理上起着很大的作用,这个场在 M^n 上除某些孤立的间断点以外是处处光滑的. 下面我们来介绍一些例子.

设 $\boldsymbol{v}(P)$ 是 M^n 上的光滑场. 注意,轨线 $\gamma(t)$,如果

$$\dot{\gamma}(t)=\boldsymbol{v}(\gamma(t)),$$

即切于 $\gamma(t)$ 的速度向量与向量场 $\boldsymbol{v}$ 一致,那么,就称 $\gamma(t)$ 为场 $\boldsymbol{v}(P)$ 的**积分曲线**.

例 设 $f(P)$ 是平面上的函数,且 $\boldsymbol{v}(P)=\operatorname{grad} f(P)$.

(a) $f(P)=x^2+y^2$, $\operatorname{grad} f=(2x,2y)$. 积分轨线从点 O 发出,组成射线束(图 4.36)

(b) $f(P)=-x^2-y^2$, $\operatorname{grad} f=(-2x,-2y)$. 积分轨线是进入点 O 的射线(图 4.37)

(c) $f(P)=-x^2+y^2$, $\operatorname{grad} f=(-2x,2y)$. 积分轨线是双曲线(图 4.38).

(a),(b),(c) 三个场都以点 O 为奇点. 函数 f 在情形(a)为极小点;在情形(b)为极大点;在情形(c)为鞍点.

人们通常说的向量场 $\boldsymbol{v}$ 就是沿着流形流动的流体的流. 同时认为在流体的每一个质点上安上一个向量,指出该质点的速度. 例如,图 4.36 中的奇点是源(流体由点 O"流出"),而图 4.37 中的奇点是汇. 场 $\boldsymbol{v}$ 的积分轨线有时称为流体的流线. 依赖于时间的流动称为非稳定场,它们可以模拟为光滑地依赖于时间 t 的向量场 $\boldsymbol{v}(P,t)$.

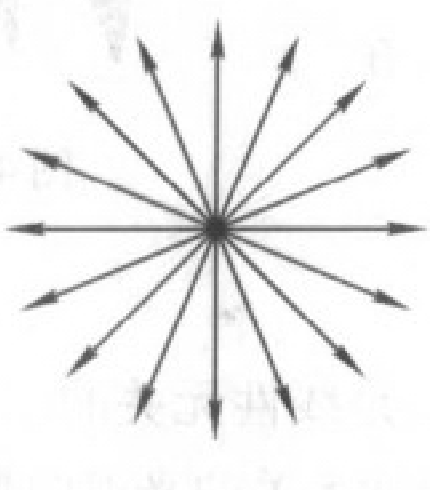


图 4.36

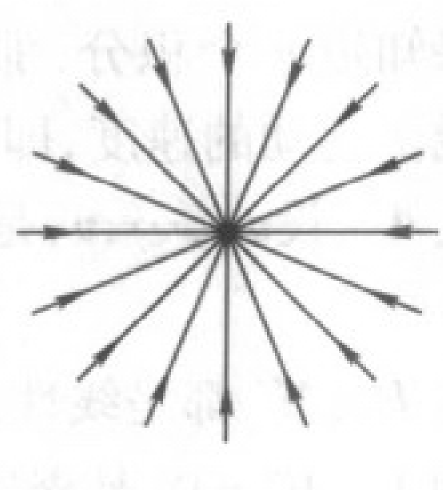


图 4.37

如何求出场的积分轨线? 相应的工具在常微分方程理论中研究. 每一个场 $\boldsymbol{v}=(v^1(P),\cdots,v^n(P))$ 可以等同于常微分方程组: $\frac{dx^k}{dt}=v^k(x^1,\cdots,x^n)$, $1\leqslant k\leqslant n$. 常微分方程组的右边部分不显含参数 t 时,称为**自治方程组或稳定方程组**.

在特殊情况,积分轨线的性态可用十分简单的述语来描述.

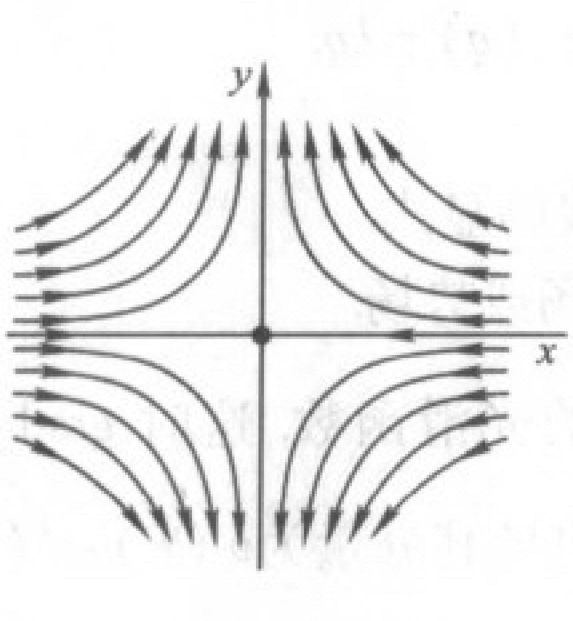


图 4.38



图 4.39

定义 3 设给出与 M^n 上的场 $\boldsymbol{v}(P)$ 相应的微分方程组,若 M^n 上的光滑函数 $f(P)$,沿着流的所有积分轨线取常数值,则称 $f(P)$ 为**方程组的积分**.

设 f 是积分. 超曲面 $\{f=c\}$ 在 c 改变时使 M^n 分层. 考察固定的超曲面 $f(P)=c_0$. 在 $\mathrm{grad}\, f$ 的正常点的邻域中,曲面 $\{f=c\}$ 是 $n-1$ 维的光滑子流形. 从积分的定义知,如果积分轨线与 $\{f=c_0\}$ 有公共点,那么整个轨线都在 $\{f=c_0\}$ 上. 由此得到,在每一点 P,曲面 $\{f=f(P)\}$ 都与场 $\boldsymbol{v}(P)$ 相切(参看图 4.39). 这就是说,每一个曲面 $\{f=c\}$ 由流 $\boldsymbol{v}$ 的积分轨线分层. 把场 $\boldsymbol{v}$ 限制在曲面 $\{f=c\}$ 上时,就能够使原来的方程组降低一阶.

如果给出两个函数独立的积分 f 和 g(即在 M^n 的几乎所有的点上,$\mathrm{grad}\, f$ 与 $\mathrm{grad}\, g$ 线性无关),那么方程组的阶数甚至降低两阶(参看图 4.40)等等. 如果给出一组 $n-1$ 个函数独立积分,那么所有的积分轨线可以描述为

$$\gamma(t)=\{f_1=c_1\}\cap\cdots\cap\{f_{n-1}=c_{n-1}\},$$

其中,$\gamma(0)=P, f_k(P)=c_k, 1\leqslant k\leqslant n-1$.

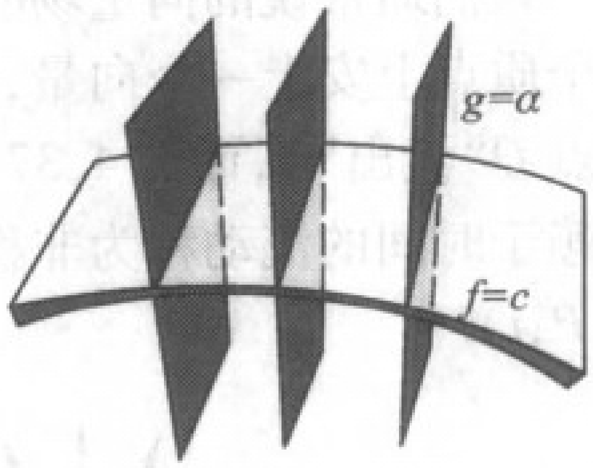


图 4.40

如果知道 n 个积分,那么最后的积分给出点,在积分轨线上运动的速度,即流完全可积.

定义 4 设 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k$ 是 M^n 上的场,如果向量

$$\boldsymbol{v}_1(P),\cdots,\boldsymbol{v}_k(P)$$

在每一点 $P\in M^n$ 都是线性无关的,就称场 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k$ 是线性无关的.

命题 1 $M^n=\mathfrak{G}$ 是李群,在 $\mathfrak{G}$ 上总存在 n 个线性无关的光滑向量场 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$.

证明 考虑 $\mathfrak{G}$ 上的左位移运算 $L_a: g\to ag$. 显然,L_a 是 $\mathfrak{G}$ 的微分同胚. 考虑单位元 $e\in\mathfrak{G}$;在 $T_e(\mathfrak{G})$ 中给出 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,并考察微分 $dL_a: T_e(\mathfrak{G})\to T_a(\mathfrak{G})$. 设 $\boldsymbol{v}_k(a)=dL_a(\boldsymbol{e}_k)$. 因为 L_a 是微分同胚,所以 dL_a 是非退化的,即向量 $\boldsymbol{v}_k(a), 1\leqslant k\leqslant n$,是线性无关的. 命题证毕.

可以在 S^3 上作出三个无关场的有趣例子. S^3 同胚于 $SU(2)$. 设 $S^3=\{q\in\boldsymbol{Q}; |q|=1\}$. 命

$$\boldsymbol{v}_1(q)=iq, \boldsymbol{v}_2(q)=jq, \boldsymbol{v}_3(q)=kq.$$

易知,这些场在点 q 切于 S^3 并且是线性无关的.

练习题 求出球面 S^3 上所说场的积分轨线的显式.

在 M^n 上的光滑场中分出一类所谓的梯度场或势场.

设 M^n 附上了黎曼度量,并且 f 是 M^n 上的光滑函数. 这时 $\mathrm{grad}\, f=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$ 是 $T_P(M^n)$ 的对偶空间的元素. 为了得到向量,作出场其分量为 $\boldsymbol{v}(P): v^k(x)=g^{kp}(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^k}$. 显然,$v^1,\cdots,v^n$ 按向量的坐标变换规则变换,仍用 $\mathrm{grad}\, f$ 表示它.

定义 5 形式为$\boldsymbol{v}(P)=\operatorname{grad} f$的场,其中$f$是$M^n$上的光滑函数,称为$M^n$上的**势场或梯度场**.

引理 2 势场没有无奇点的闭积分轨线.

证明 设存在闭积分轨线. 它称为系统的周期解. 这时$\dot{x}(t)=\boldsymbol{v}(x)$,$x(t)$是解. 若$f$是势,则

$$\frac{df}{dx}=(\dot{x},\boldsymbol{v}(x))=g_{ij}\dot{x}^i v^j(x)=g_{ij}v^i(x)v^j(x)$$

$$=|\operatorname{grad} f|^2>0.$$

由此,f在t增加的方向上严格单调增加. 但由于轨线$\gamma(t)$是闭的,从而经过一段时间后,点$\gamma(t)$返回到原来的位置,这与f的单值性相矛盾. 引理证毕.

例如,图 4.41 表示的场,不是势场(流体绕坐标原点旋转).

考察在二维流形上的场. 为简单起见,限制在局部来研究;这时可以认为,是在欧氏平面上给出流. 我们将把场解释为具有均匀密度的流体的流(密度等于1). 由常微分方程教程知道,每个流以不变的方式联系着单参数可微同胚群,即沿着场的积分轨线的位移. 设场$\boldsymbol{v}$的坐标为$(P(x,y),Q(x,y))$,考察边为dx,dy的无穷小矩形中质量的变化(参看图 4.42). 如果dm是矩形(dx,dy)中流体的质量,那么$dm=dx\cdot dy$.



图 4.41

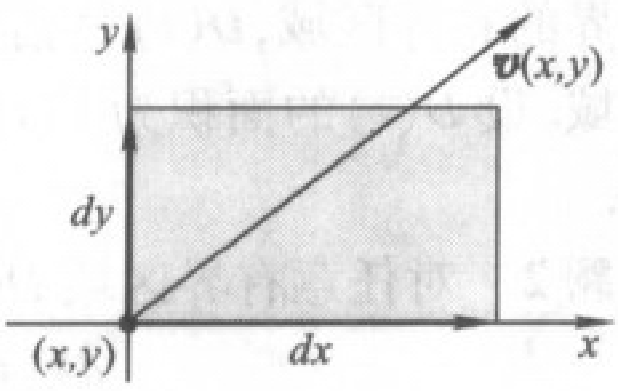


图 4.42

如果$\gamma(t)$是解,那么t恰好确定为沿$\gamma(t)$的位移;假设$f_{t_0}(P)=\gamma(t_0)$,$\gamma(0)=P$. 则映射f_{t_0}是微分同胚. 考察$P=(x,y)$和矩形(dx,dy). 经$f_{(-\Delta t)}$后,将(dx,dy)变为无穷小平行四边形Γ(参看图 4.43). 随着t的变化,质量$dm(t)=dx(t)\cdot dy(t)$也变化.

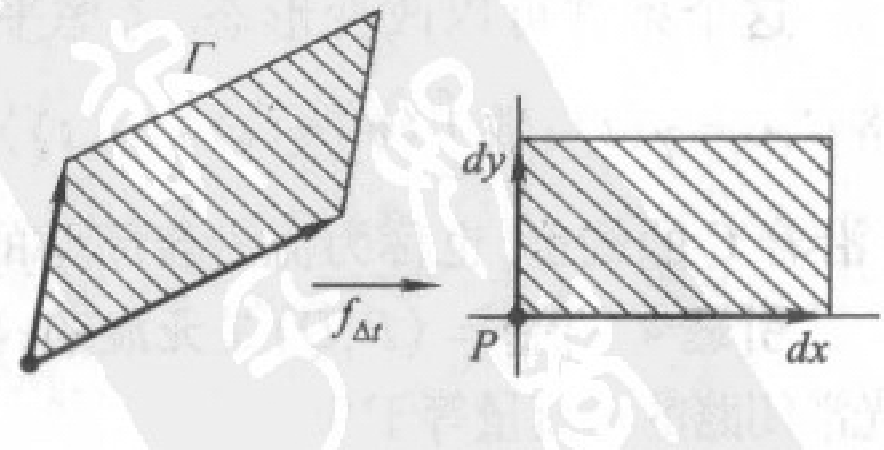


图 4.43

引理 3 无穷小矩形(dx,dy)中质量的变化为

$$\frac{d}{dt}(dm(t))=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy.$$

证明 我们认为,$f_{\Delta t}$在(dx,dy)中引进新坐标系,我们有

$$\begin{aligned}&dx(t+\Delta t)\cdot dy(t+\Delta t)\\&=d(x(t)+\Delta t\cdot x_t')\cdot d(y(t)+\Delta t y_t')\\&=\left(dx(t)+\Delta t\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\right)\cdot\\&\quad\left(dy(t)+\Delta t\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\right).\end{aligned}$$

因为在第一个因式中,$dP(x,y)$仅沿着轴 Ox 取改变量,所以在这个因式中,改变量 Δy 等于0. 在第二个因式中,仅沿着轴 Oy 取改变量,即 Δx 消失. 于是

$$\begin{aligned}&\left(dx(t)+\Delta t\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)\left(dy(t)+\Delta t\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\\&=dx(t)\cdot dy(t)+\Delta t\cdot dx(t)dy(t)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

略去高阶小量,得到

$$\Delta dm(t)=\Delta t\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy.$$

引理证毕.

定义6 函数 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$ 称为流$\boldsymbol{v}$的**散度**(在笛卡儿坐标系中). 如果 $\operatorname{div}(\boldsymbol{v})=0$,则该流称为是**不可压缩的**.

由引理3得到,当且仅当流是不可压缩时,质量的变化为0. 设 D 是具有逐段光滑边界的有界区域,$D(t)$是借助于单参数群将 D 沿着$\boldsymbol{v}$的积分轨线位移 t 后得到的区域. 设 $D(t)$的面积为 $V(t)$,若流体的密度为1,则 $V(t)$就是包含在 $D(t)$中的质量.

命题2 对任意有界区域 $D(t)$,有

$$\frac{dV(t)}{dt}=\iint\limits_{D(t)}\operatorname{div}(\boldsymbol{v})dxdy.$$

把 $D(t)$分为无限小的矩形并应用引理3即可证得.

定义7 流$\boldsymbol{v}=(P,Q)$,如果 $P_y=Q_x$,则称该流是**无旋的**.

这个条件可以改变形态. 考虑平面上任意的光滑闭路 C, $C=\gamma(t)$;数 $\int_C\langle\boldsymbol{v}(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle dt$(图4.44)称为流$\boldsymbol{v}$沿着 C 的**旋度**,也称为流沿着闭路的**环流量**.

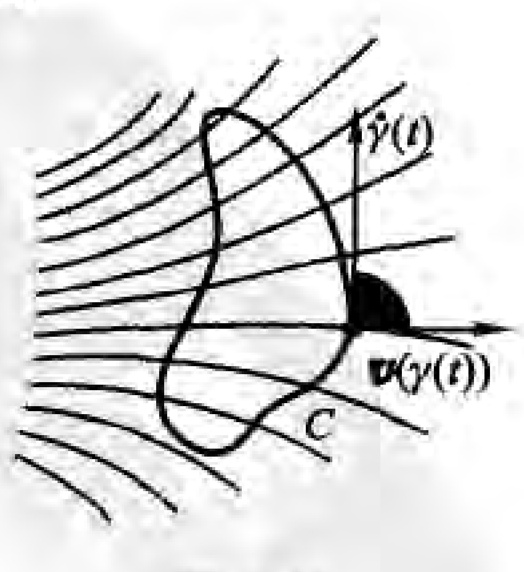


图4.44

引理4 流$\boldsymbol{v}=(P,Q)$是**无旋的**,当且仅当它沿着任何光滑闭路的环流量等于0.

证明 设 D 是 C 所围的区域. 我们有

$$\int_{\gamma(t)}\langle\boldsymbol{v}(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \iint_D (P_y - Q_x) dxdy;$$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

这里应用了 Stokes 公式(参看第 6 章). 引理证毕.

命题 3 设 $\boldsymbol{v}$ 是平面上的无旋流. 当 $\boldsymbol{v}$ 是势场时,即存在光滑的函数 $a(x,y)$,使 $\boldsymbol{v} = \text{grad } a(x,y)$,则形式 $Pdx + Qdy$ 是函数 $a(x,y)$ 的全微分,函数 $a(x,y)$ 除一个可加常数外是唯一确定的.

证明 应该在 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 的条件下积分微分方程组

$$P = \frac{\partial a}{\partial x}, Q = \frac{\partial a}{\partial y}.$$

关于 x 积分第一个方程,得到

$$a(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + g(y).$$

关于 y 微分,得到

$$Q(x,y) = \int_0^x \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} dx + \frac{dg(y)}{dy}$$

或

$$Q(0,y) = \frac{dg(y)}{dy},$$

即 $g(y) = \int_0^y Q(0,y)dy + c$,这里 $c =$ 常数. 于是

$$a(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy + c.$$

假如从方程 $Q = \frac{\partial a}{\partial y}$ 着手积分,那么得到

$$a(x,y) = \int_0^y Q(x,y)dy + \int_0^x P(x,0)dx + c.$$

函数 $a(x,y)$ 就是流的势. 我们从几何上来描述 $a(x,y)$.

考察两个分段光滑道路 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \gamma' = \gamma_1' \cup \gamma_2'$(图 4.45). 显然,有

$$a(x,y) = \int_\gamma (Pdx + Qdy);$$

$$= \int_{\gamma'} (Pdx + Qdy),$$

即 $a(x,y)$ 可以沿着道路 γ 或 γ' 将微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ 积分而得到.

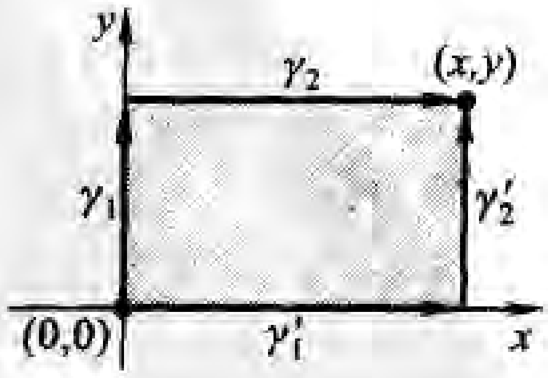


图 4.45

命题 4 设流 $\boldsymbol{v}$ 是无旋的. 当它是势场时,则势可表示为

$$a(x,y) = \int_\gamma P dx + Q dy = \int_\gamma \omega,$$

这里 γ 是任意从点(0,0)到点(x,y)的分段光滑的道路. 积分 $\int_\gamma \omega$ 不依赖于道路的选择.

证明 $\int_\gamma P dx + Q dy$ 不依赖于道路的选择(起点和终点是固定的),这个事实可由 Stokes 公式得出(参看第6章). 道路可取图 4.45 所表示的两个道路之一. 命题证毕.

设 $\boldsymbol{v}$ 是无旋的和不可压缩的,它的坐标 P 和 Q 满足

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, P = \frac{\partial a}{\partial x}, Q = \frac{\partial a}{\partial y},$$

由此,$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0$. 二阶线性微分算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$(在笛卡儿坐标下)称为 Laplace **算子**. 满足 $\Delta f = 0$ 的函数 $f(x,y)$,称为**调和函数**.

我们已经证明了无旋的和不可压缩流的势是调和函数. 通常把 $a(x,y)$ 与另外的势 $b(x,y)$ 成对地考察,$b(x,y)$ 称为**共轭势**,或称为**共轭流的势**. 它是方程组

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = P$$

的解. 函数 $b(x,y)$ 是流 $\tilde{\boldsymbol{v}} = (-Q,P)$ 的势,$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 称为 $\boldsymbol{v} = (P,Q)$ 的共轭势. 显然,流 $\boldsymbol{v}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 是相互正交的.

考察复变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的平面,和复值函数 $f(x,y) = a(x,y) + \mathrm{i}b(x,y)$,$a$ 和 b 是不可压缩流 $\boldsymbol{v} = (P,Q)$ 的势和共轭势. 把 $\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}$ 简记为 g_y, g_x. 因为 $a_x = P, a_y = Q, b_x = -Q, b_y = P$,所以 $a_x = b_y, a_y = -b_x$. 这样的函数 $f(x,y) = a + \mathrm{i}b$ 称为复解析函数,而 a 和 b 所满足的方程称为 Cauchy-Riemann **方程**(条件). 函数 a 和 b 分别称为函数 f 的实部和虚部:$a = \mathrm{Re}(f)$, $b = \mathrm{Im}(f)$. 我们注意一下复解析函数的一些性质.

设 $z = x + \mathrm{i}y, \bar{z} = x - \mathrm{i}y$,可展开为变量 x,y 的收敛级数的任何函数

$$g(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

可写为:$g(x,y) = \tilde{g}(z,\bar{z})$. 按复合函数的微分法则

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

类似地,有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

从函数 $g(z,\bar{z})$ 的集合中分划出那些仅依赖于 z 的函数. 在分析中,这可以写为 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z,\bar{z}) = 0$. 这样的函数也称为**复解析函数**;它们展开为仅含变量 z 的收敛幂级

数. 因为$\frac{\partial g}{\partial z}=0$,所以

$$g_x+\mathrm{i}g_y=0,$$

即$u_x+\mathrm{i}v_x+\mathrm{i}(u_y+\mathrm{i}v_y)=0$,故条件$\frac{\partial g}{\partial z}=0$等价于Cauchy-Riemann方程:$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

因此,证明了下面定理:

定理1 平面上任何无旋的和不可压缩的流$\boldsymbol{v}=(P,Q)$可表示为$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}a(x,y)$,而共轭的流$\tilde{\boldsymbol{v}}=(\tilde{P},\tilde{Q})$表示为$\tilde{\boldsymbol{v}}=\mathrm{grad}b(x,y)$,其中函数$f(x,y)=a(x,y)+\mathrm{i}b(x,y)$,是复解析函数,并且除一个可加常数外是唯一确定的. 反之也成立:若$f(z)$是复解析函数,则流$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\ \mathrm{Re}(f(z))$和$\tilde{\boldsymbol{v}}=\mathrm{grad}\ \mathrm{Im}(f(z))$是无旋的和不可压缩的;此外它们是互相共轭的.

$\boldsymbol{v}$和$\tilde{\boldsymbol{v}}$的积分轨线是正交的. 函数$f=a+\mathrm{i}b$称为流的**复势**. 现在来研究平面上向量场的奇点例子.

设$\boldsymbol{v}$是无旋的和不可压缩的流. 怎样去找$\boldsymbol{v}$和$\tilde{\boldsymbol{v}}$的零点? 从Cauchy-Riemann方程,有

$$f_z'(z)=\frac{1}{2}(f_x-\mathrm{i}f_y)=a_x-\mathrm{i}a_y=b_y+\mathrm{i}b_x.$$

引理5 使$f_z'(z)=0$的点与流$\boldsymbol{v}$的零点相同(这些点也是流$\tilde{\boldsymbol{v}}$的零点).

由$f_z'(z)=a_x-\mathrm{i}a_y=b_y+\mathrm{i}b_x$立即可以得到证明.

到现在为止,考虑的都是光滑场. 但是上面所进行的所有论证对于有孤立间断点的流,且这些间断点又不是方程$f'(z)=0$的解时也适用.

设$\boldsymbol{v}$是不可压缩的、无旋的流,即

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\ \mathrm{Re}(f(z)).$$

如何求出这个场的积分轨线? 结果是不需要解相应的微分方程组.

命题5 设$f=a+\mathrm{i}b$是复解析函数.

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}(a),\tilde{\boldsymbol{v}}=\mathrm{grad}(b).$$

那么,b是对场$\boldsymbol{v}$的积分,而a是对场$\tilde{\boldsymbol{v}}$的积分,即$\boldsymbol{v}$的积分轨线是函数b的水平线,而$\tilde{\boldsymbol{v}}$的积分轨线是函数a的水平线.

证明 显然,

$$\frac{db}{d\boldsymbol{v}}=\langle\boldsymbol{v},\mathrm{grad}b\rangle=a_xb_x+a_yb_y=0,$$

和$\frac{da}{d\tilde{\boldsymbol{v}}}=0$. 命题证毕.

考察例子.

1) 设$f(z)=z^k, k\geqslant 2$. 显然,$a=r^k\cos k\varphi$; $b=r^k\sin k\varphi$. 在图 4.46 上画出了 grad(a)的积分轨线($k=4$).

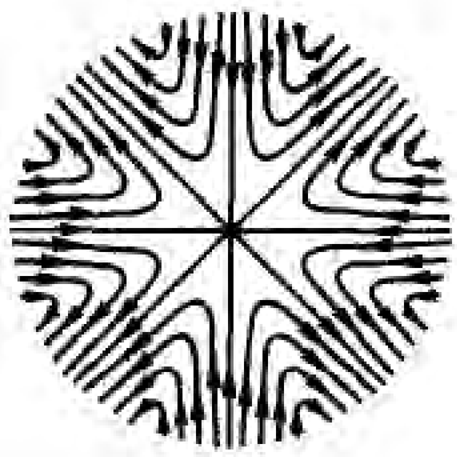


图 4.46

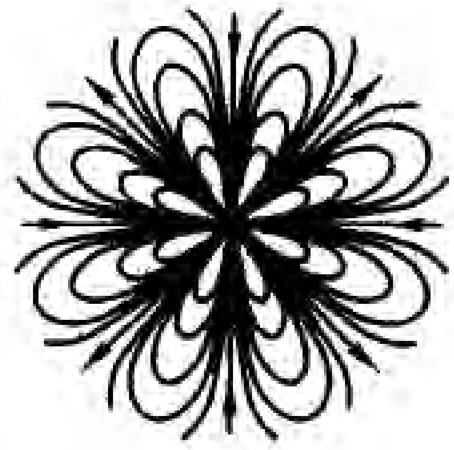


图 4.47

2) 设$f=z^{-k}, k\geqslant 1, f=r^{-k}\cdot(\cos k\varphi-\mathrm{i}\sin k\varphi)$。图 4.47 表现了 grad($a$)的积分轨线($k=4$).

3) 设$f(z)=\ln(z)$. 图 4.48 表现了 $\boldsymbol{v}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 的积分轨线. 这是对数的特性.

4) 考察 Жуковский 函数$f(z)=z+\frac{1}{z}$. (对其中一个流的)积分轨线表现在图 4.49 上. 练习:作出它的共轭流的轨线.

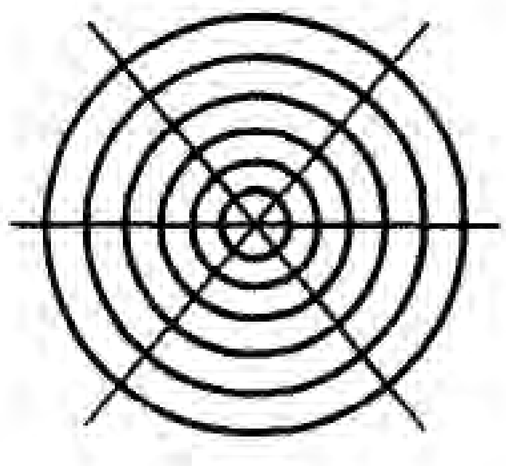


图 4.48

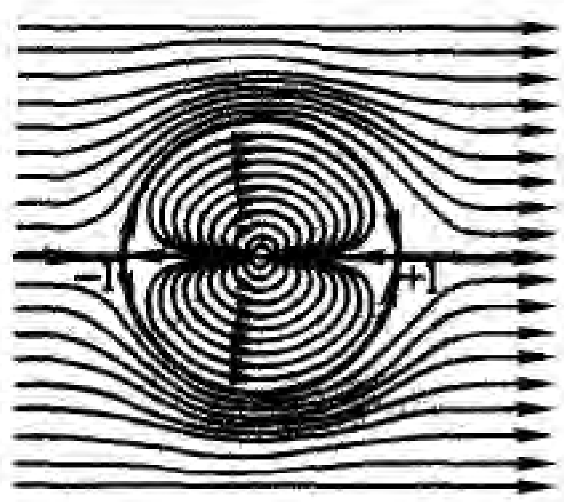


图 4.49

5) 设$f(z)=\frac{1}{\alpha}(\ln(z+\alpha)-\ln(z-\alpha))$, α 是实数. 一个流的图表示在图 4.50 上.

练习　请作出共轭流的图.

这里可以用图解说明奇点的汇合. 在 $\alpha\neq 0$ 时,流的图(参看图 4.50)与偶极子相同(两个电荷,放在奇点上). 在 $\alpha\to 0$ 时,$f(z)\to f_z'(z)=\frac{1}{z}$,并且偶极子场转化为与一阶极点的流场(参看图 4.51).

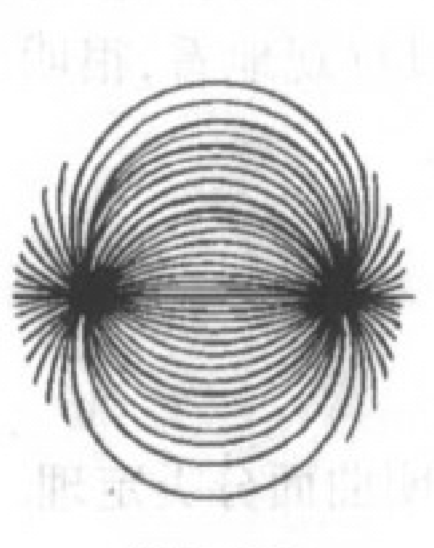


图 4.50

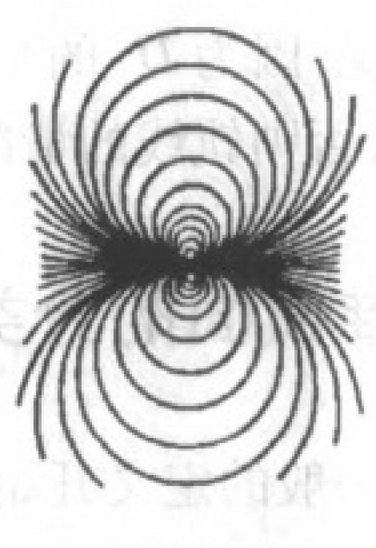


图 4.51

6）考察具有简单实根的多项式 $P_k(z)=\prod_{i=1}^{k}(z-\alpha_i)$. 流示意图表示在图4.52上. 设所有的根 α_i 趋向于0，多项式转化为 $\widetilde{P}_k(z)=z^k$，它仅有一个 k 阶零点. 流的形变参看图4.53.

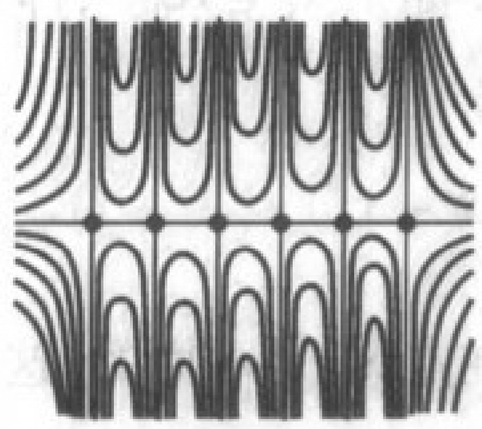


图 4.52

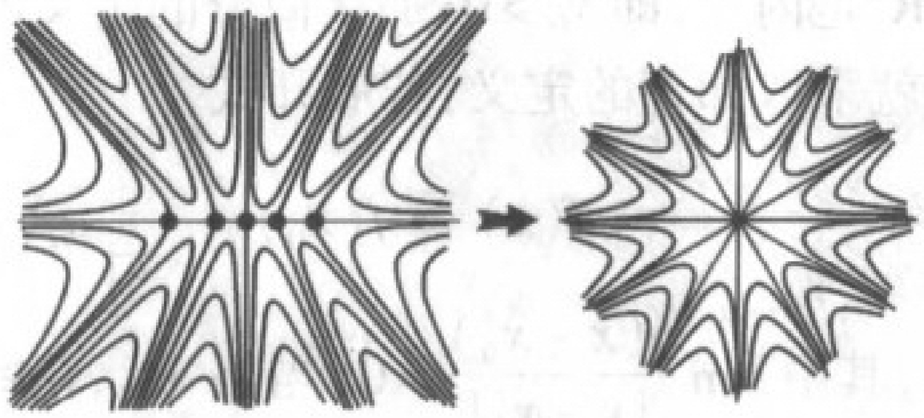


图 4.53

7）练习　利用球极射影，将上面的描述的流转移到二维球面上.

在 S^2 上作出无奇点光滑场的企图是徒劳的；这种情况不是没有原因的. 我们从直观上论证，S^2 上的任何光滑场一定有奇点. 假定在 S^2 上作出了无奇点的场. 把 S^2 表示为两个圆盘的并：$S^2=D_1\cup D_2$，D_1 是中心在南极 N，并具有小半径 ε 的圆盘，D_2 是 D_1 的补集（参看图4.54）.

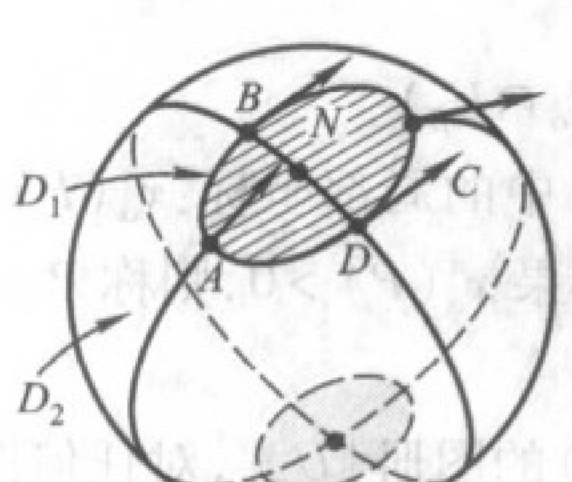


图 4.54

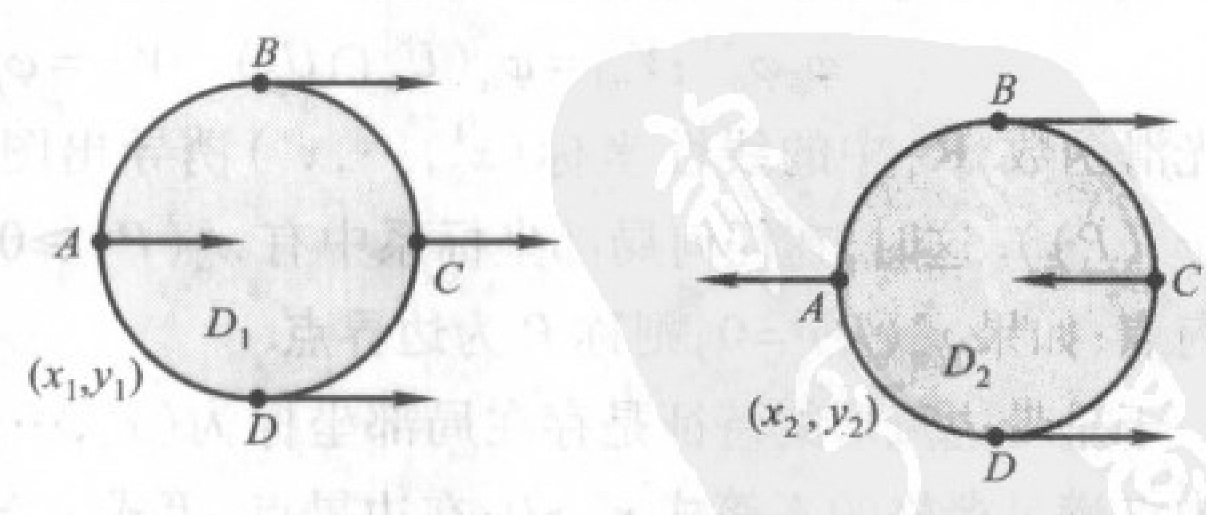


图 4.55

在 D_1 和 D_2 上引进笛卡儿坐标：(x_1,y_1) 和 (x_2,y_2). 这时，在 D_2 上场 $\boldsymbol{v}$（在这些坐标系中）有图4.55中指出的样子. 该向量场的样子可以从如下看出. 沿着经线

拉长 D_1,使它覆盖除小半径的 D_2 外的几乎整个球面. 这时我们便得到图 4.55 中所指出的情况. 因为 D_2 的半径可认为是很小的,所以直观地看,很明显,它的内部应该有奇点;否则轨线的情况就和 D_1 的情况一致了.

4.5 二维曲面的分类

我们从一般的定义开始,然后给出例子,最后证明曲面分类定理.

4.5.1 带边流形

现在扩大光滑流形的概念,使它包含 $\mathbf{R}^n$ 中由方程组和不等式给出的子集合. 用 $\mathbf{R}^n_+\subset\mathbf{R}^n$ 表示由 $x^n\geqslant 0$,给出的半空间. 用 $\mathbf{R}^{n-1}_0$ 表示 $\mathbf{R}^n_+$ 的边界 $x^n=0$. 如果 $f:\mathbf{R}^n_+\to\mathbf{R}^1$ 在所有的点,也包括在边界点是连续函数. 我们定义函数 f 的微分. 如果点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 是内点,即 $x_0^n>0$,那么微分的定义即通常的定义. 如果 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^{n-1}_0$,即 $x_0^n=0$,那么就采取如下的定义:若展开式

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x^i-x_0^i)+o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

成立,其中 $\lim\dfrac{o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}=0$(当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0,x^n\geqslant 0$ 时),则 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 是可微的. 这时 $a_i=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0),i=1,\cdots,n-1$,

$$a_n=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(f(x_0^1,\cdots,x_0^{n-1},x_0^n+h)-f(x_0^1,\cdots,x_0^n)).$$

最后一式的极限称为函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x^n}$ 是恰当的. 对函数光滑性的类 C^r,$r=1,2,\cdots,\infty$,可类似地定义.

定义 1 度量空间 M 称为**带边光滑流形**,如果存在图册 $\{U_\alpha\}$,和坐标同胚 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbf{R}^n_+$,$V_\alpha$ 是 $\mathbf{R}^n_+$ 中的开集,使坐标变换函数

$$\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}:V_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to V_{\beta\alpha}=\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是光滑函数. $\mathbf{R}^n_+$ 中的线性坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 诱导出图 U_α 中的局部坐标:$x_\alpha^k(P)=x^k(\varphi_\alpha(P))$. 这时,在任何局部坐标系中有 $x_\alpha^n(P)\geqslant 0$. 如果 $x_\alpha^n(P)>0$,则称 $P\in M$ 为**内点**;如果 $x_\alpha^n(P)=0$,则称 P 为**边界点**.

于是带边流形的特征是存在局部坐标为 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 的图册 $\{U_\alpha\}$,对任何图,在内点满足严格的不等式 $x_\alpha^n>0$;在边界点,等式 $x_\alpha^n=0$ 成立. 如果图 U_α 不包含边界点,那么可以去掉条件 $x_\alpha^n>0$ 而不失其一般性. 边界点的集合 ∂M 是低一维的光滑流形. 事实上,应取交 $W_\alpha=\partial M\cap U_\alpha$ 作为图册,取图 U_α 的前 $(n-1)$ 个坐标 $x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^{n-1}$ 作为它的坐标. 坐标同胚 φ_α(参看上面)使 W_α 同胚于 $V_\alpha\cap\mathbf{R}^{n-1}_0$,而变换函

数作为流形 M 的坐标变换函数的限制仍是光滑的.

如果 $\partial M=\varnothing$,则得到前面所讲的流形的概念,今后我们将称之为闭流形.

例 1 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中由不等式 $\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\leqslant 1$ 给出球 D^n,空间 D^n 是以 S^{n-1} 为边界的流形.

例 2 一般地,设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ 是满足隐函数定理的条件的向量函数,即在所有的点 $P\in M=\{f(P)=0\}$,微分 df 有最大可能的秩. 考察等式和不等式组:$f(x^1,\cdots,x^n)=0,\cdots,f^{k-1}(x^1,\cdots,x^n)=0,f^k(x^1,\cdots,x^n)\geqslant 0$,并设 M' 是这个组的解集合. 如果在每一点 $P\in M'$,$\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^s}\right)=k-1,1\leqslant i\leqslant k-1,1\leqslant s\leqslant n$,那么,$M'$ 是以 $\partial M'=M$ 为边界的流形. 事实上,根据对方程组 $f^1=0,\cdots,f^{k-1}=0$ 隐函数定理在点 $P\in M'\setminus M$ 的图册是存在的. 考虑 $P\in M$. 设 N' 是方程组 $f^1=0,\cdots,f^{k-1}=0$ 在点 P 的某个邻域中解的集合. 这时 f^k 可以看作 N' 上的函数. 显然,f^k 的微分在 N' 上不等于 0. 于是,根据第三章 §5 的定理,N' 微分同胚于区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 与流形 N 的直积:$N'=N\times(-\varepsilon,\varepsilon)$,其中 N 是 M 与点 P 的邻域的交. 所以不等式 $f^k\geqslant 0$ 分解出图 $N\times[0,\varepsilon)$,其坐标取为流形 N 上的 $(x^1,\cdots,x^{n-k})$ 和函数 $f^k\geqslant 0$.

例 3 从上面的例子中看到,有边界 ∂M 的流形 M 与闭流形 N 的笛卡儿直积是有边界 $\partial M\times N$ 的流形 $M\times N$.

4.5.2 可定向流形

定义 2 流形(或带边流形)M 称为**可定向的**,如果存在图册 $\{U_\alpha\}$,使得从一个局部坐标系到另一个的转换函数的 Jacobi 是正的. 我们也称使所有的坐标转换函数的 Jacobi 为正的图册 $\{U_\alpha\}$,在流形 M 上给出一个定向,而图册本身称为定向的图册. 如果两个定向的图册 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{U'_\alpha\}$ 的并 $\{U_\alpha\}\cup\{U'_\alpha\}$ 仍为定向的图册,则说这两个图册给出相同的定向.

用改变每一个图中局部坐标的方法能把可定向流形的所有图册变为定向的图册(证明!).

命题 1 在连通的定向流形上存在两个不同的定向,并且任何图给出与 M 的定向中的一个相同的局部定向.

证明留给读者.

关于 M 的定向还有另外的表示法. 我们说,基 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\in\mathbf{R}^n$ 给出了欧氏空间的定向. 如果两个基变换的行列式是正的,就认为有相同的定向. 这时,$\mathbf{R}^n$ 同样具有两个不同的定向. 给出 M 的定向,这就意味着给出了在每一点 $P\in M$ 的切空间 $T_P(M)$ 的定向. 设 $\varphi:[0,1]\to M$ 是连续道路. 对始点的任何基 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\in T_{\varphi(0)}(M)$,可作出连续的始于 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 的基簇 $(\boldsymbol{e}_1(t),\cdots,\boldsymbol{e}_n(t))\in T_{\varphi(t)}(M)$,此外,在 $T_{\varphi(t)}(M)$ 中给出的任何两个这样的簇都有相同的定向. 如果 M 是可定向的,

那么在道路 φ 终点 $\varphi(1)$ 的定向不依赖于道路的选择. 这样,在 M 上给出了定向,也就给出了切空间 $T_P(M)$ 的定向,使得它们沿着连接一对点的任何连续道路都是一致的.(证明两个可定向性的定义是等价的.)

定理 1 如果带边流形 M 是可定向的,那么边界 ∂M 也是可定向的流形.

证明 设 $\{U_\alpha,(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)\}$ 是 M 上的图册. 在任何图 U_α 中,最后的坐标 x_α^n 是非负的函数. 因为 M 是可定向的,如果必要的话在每一个图 U_α 中变坐标 x_α^1 为 $-x_\alpha^1$,可以认为在每一个相交的图 $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ 中,变量变换的 Jacobi 是正的. 作为 ∂M 上的图,也像以前一样,取交 $W_\alpha=U_\alpha\cap\partial M$,而取前面 $n-1$ 个坐标作为它的局部坐标,即 $(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^{n-1})=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^{n-1})$. 我们证明,在任何点 $P\in W_\alpha\cap W_\beta$,有 $\det\left(\dfrac{\partial y_\alpha^i}{\partial y_\beta^j}\right)_{i,j=1}^{n-1}>0$.

我们考察,在包围的流形 M 上,坐标变换在点 P 的 Jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$.

因为在交 $W_\alpha\cap W_\beta$ 上,$x_\alpha^n=x_\beta^n=0$,所以

$$\frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^i}=0,1\leqslant i\leqslant n-1.$$

所以,$\det\dfrac{\partial(x_\alpha)}{\partial(x_\beta)}=\det\dfrac{\partial(y_\alpha)}{\partial(y_\beta)}\cdot\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n}>0$. 于是 $\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n}\neq0$. 因为在交 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中,$x_\alpha^n\geqslant0$,所以 $\dfrac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n}(P)>0$. 于是

$$\det\frac{\partial(y_\alpha)}{\partial(y_\beta)}(P)>0.$$

定理证毕.

定义 3 设 M 是带边的定向流形,$\{U_\alpha,(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)\}$,$x_\alpha^n\geqslant0$ 是给出 M 定向的图册. ∂M 的定向由图册 $W_\alpha=U_\alpha\cap\partial M,(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^{n-1})=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^{n-1})$ 给出的 ∂M 的定向称为与 M 的定向是一致的定向.

例 4 考察圆盘 $D^2\subset\mathbf{R}^2$. 为了给出 D^2 的定向,在一点确定一个基即可. 如果点 P 在边界上,那么基可以这样选取,第一个向量 $\boldsymbol{e}_1$ 切于边界,而第二个向量指向圆盘的内部. 这时边界上由 $\boldsymbol{e}_1$ 确定的定向与 D^2 的定向是一致的.

例 5 考察 Möbius 带,它表示为将两条不同方向的对边等同的正方形(图 4.56). 在 A 点取基 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$,沿曲线 ABA 作出连续的基簇. 在道路的终点基改变了定向,即 Möbius 带是不可定向的. 但是,它的边界是可定向圆周.

4.5.3 二维流形的分类

现在来描述二维流形. 它们当中最简单的是球面 S^2,S^2 与 $\boldsymbol{CP}^1$ 是同胚的. 已知环面 $T^2=S^1\times S^1$,也允许它有下面的表示法. 设 $\mathfrak{G}=\mathbf{Z}(a)\oplus\mathbf{Z}(b)$ 是 Abell 群,它的生成元素 a 和 b 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的位移:$a(x,y)=(x+1,y)$,$b(x,y)=(x,y+1)$. 考察

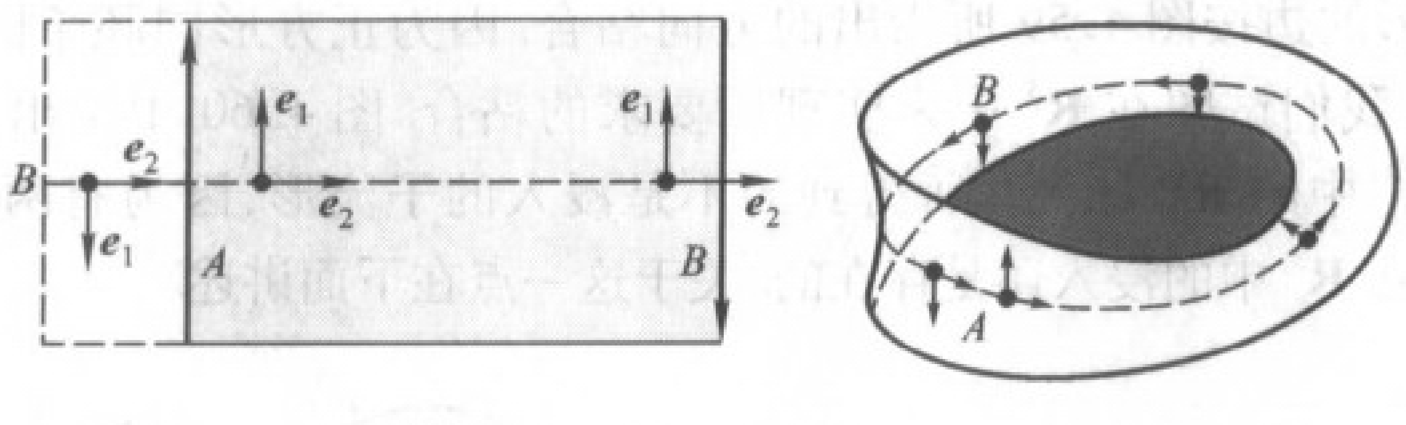


图 4.56

商群 $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ 就得到 T^2. 正方形 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 称为基本区域;它的功用是它在 $\mathfrak{G}$ 的元素的作用下,能"铺设"整个平面(参看图 4.57).

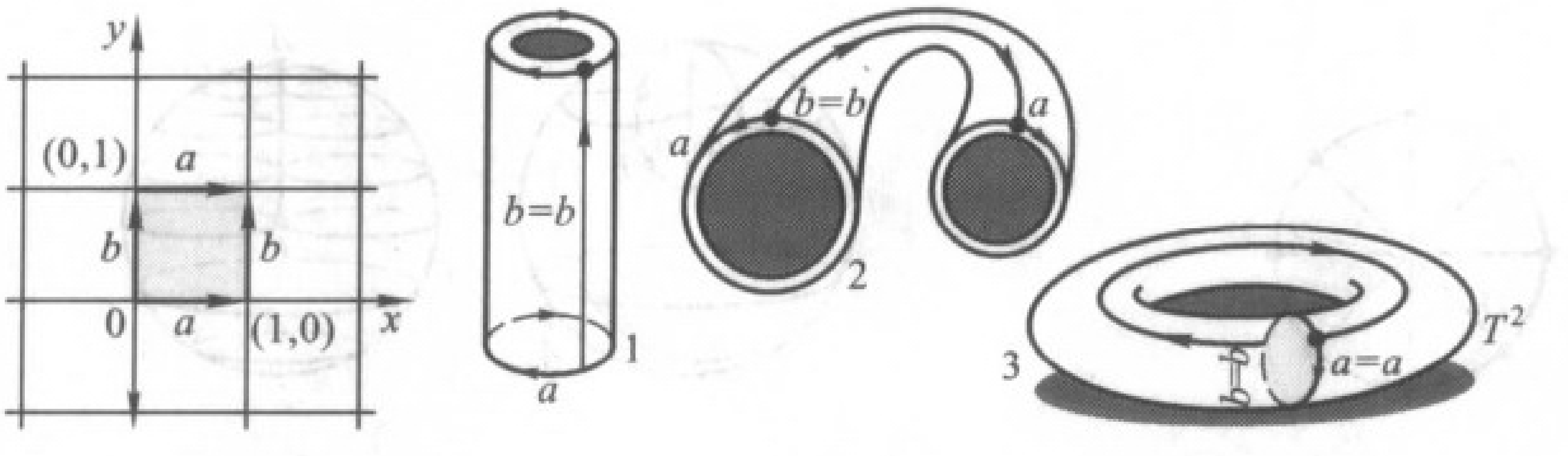


图 4.57

考察 $\mathbf{R}^2(x,y)$ 上在另一个群 $\mathfrak{G}(a,b)$,它的生成元是由 $\mathbf{R}^2$ 上的变换 $b(x,y)=(x,y+1)$, $a(x,y)=(1-x,y+1)$ 给出的(求出 a 和 b 之间的关系式). 基本区域表示在图 4.58 中. 按群的作用把箭头指出的边恒同. 求商以后产生的曲面表示在图 4.58中,称为"Klein 瓶". 环面和"Klein 瓶"都是光滑流形;环面是可定向的,而"Klein 瓶"是不可定向的(验证它!).

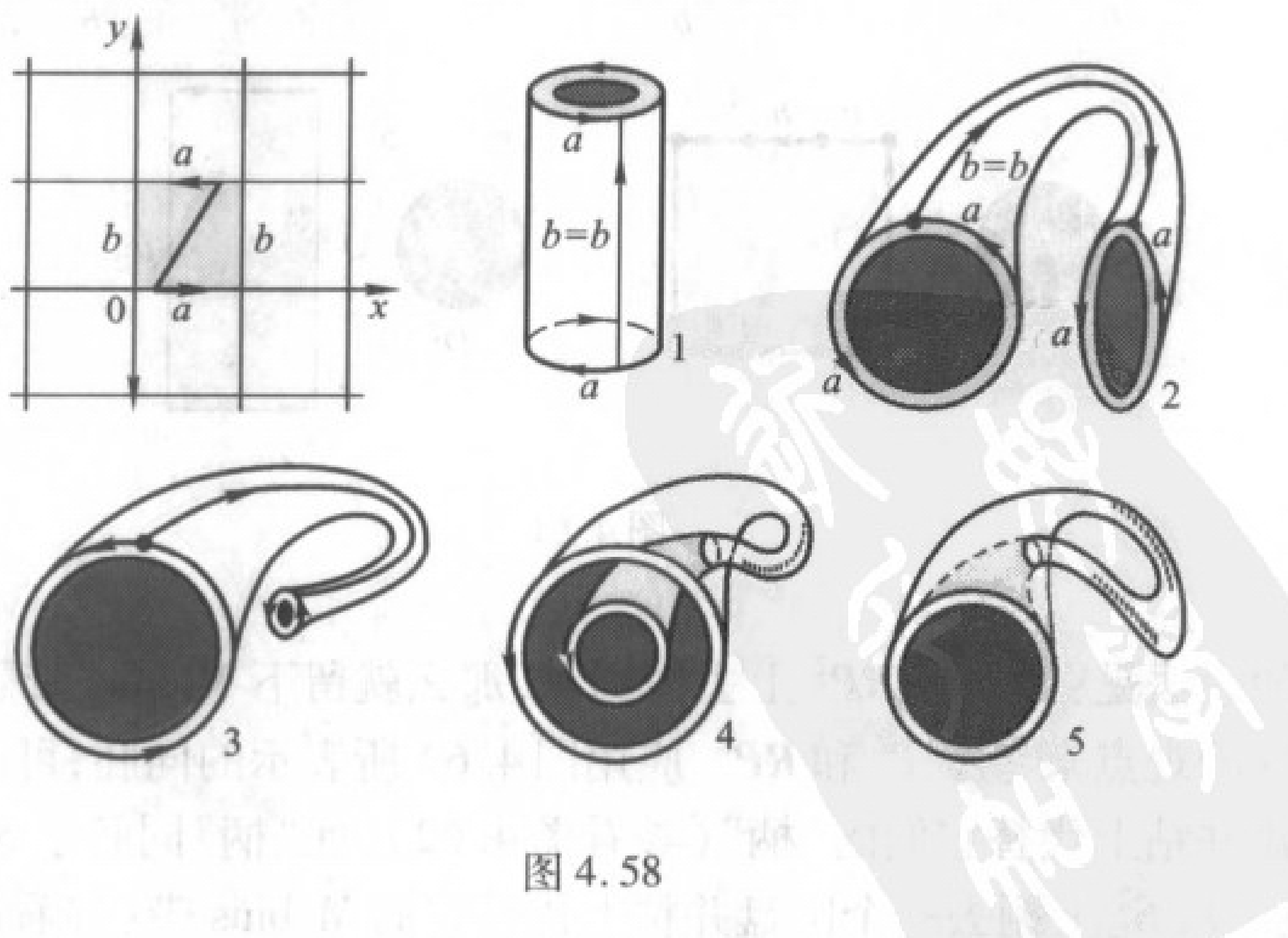


图 4.58

把正方形的边按图 4.59 所指出的方向粘合. 因为正方形同胚于圆盘, 所以得到射影平面. 我们试图在 $\mathbf{R}^3$ 中来实现所要求的粘合. 图 4.60 中指出了粘合的过程, 导出了 $\mathbf{R}^3$ 中的 $\boldsymbol{RP}^2$ 模型. 所得到的不是浸入的子流形, 因为有两个奇点 A 和 B. 然而 $\boldsymbol{RP}^2$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入还是存在的. 关于这一点在下面讲述.

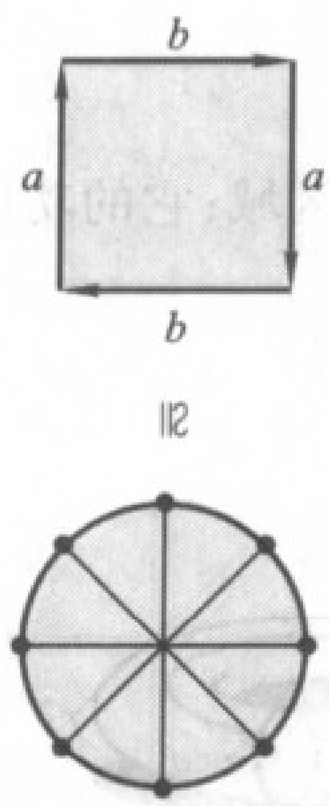


图 4.59

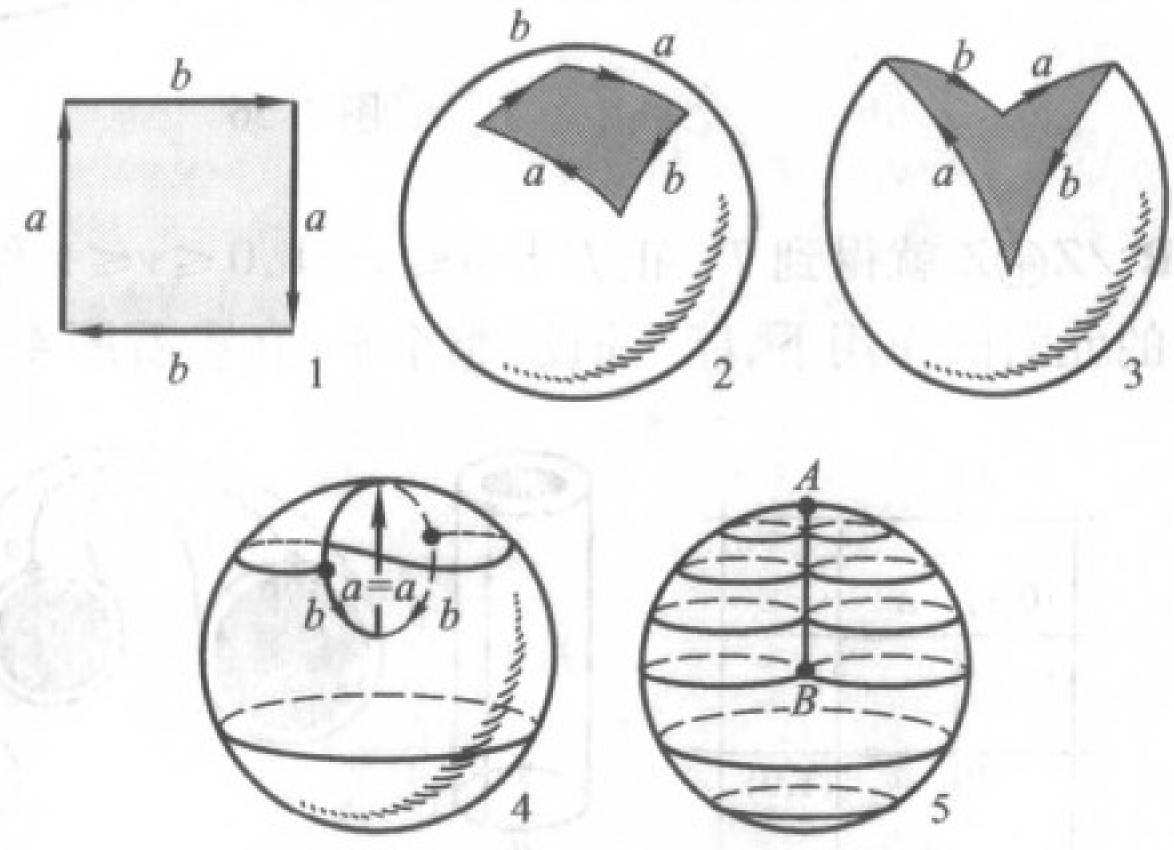


图 4.60

引理 1　$\boldsymbol{RP}^2$ 同胚于圆盘与 Möbius 带沿公共边界的粘合.

证明　参看图 4.61.

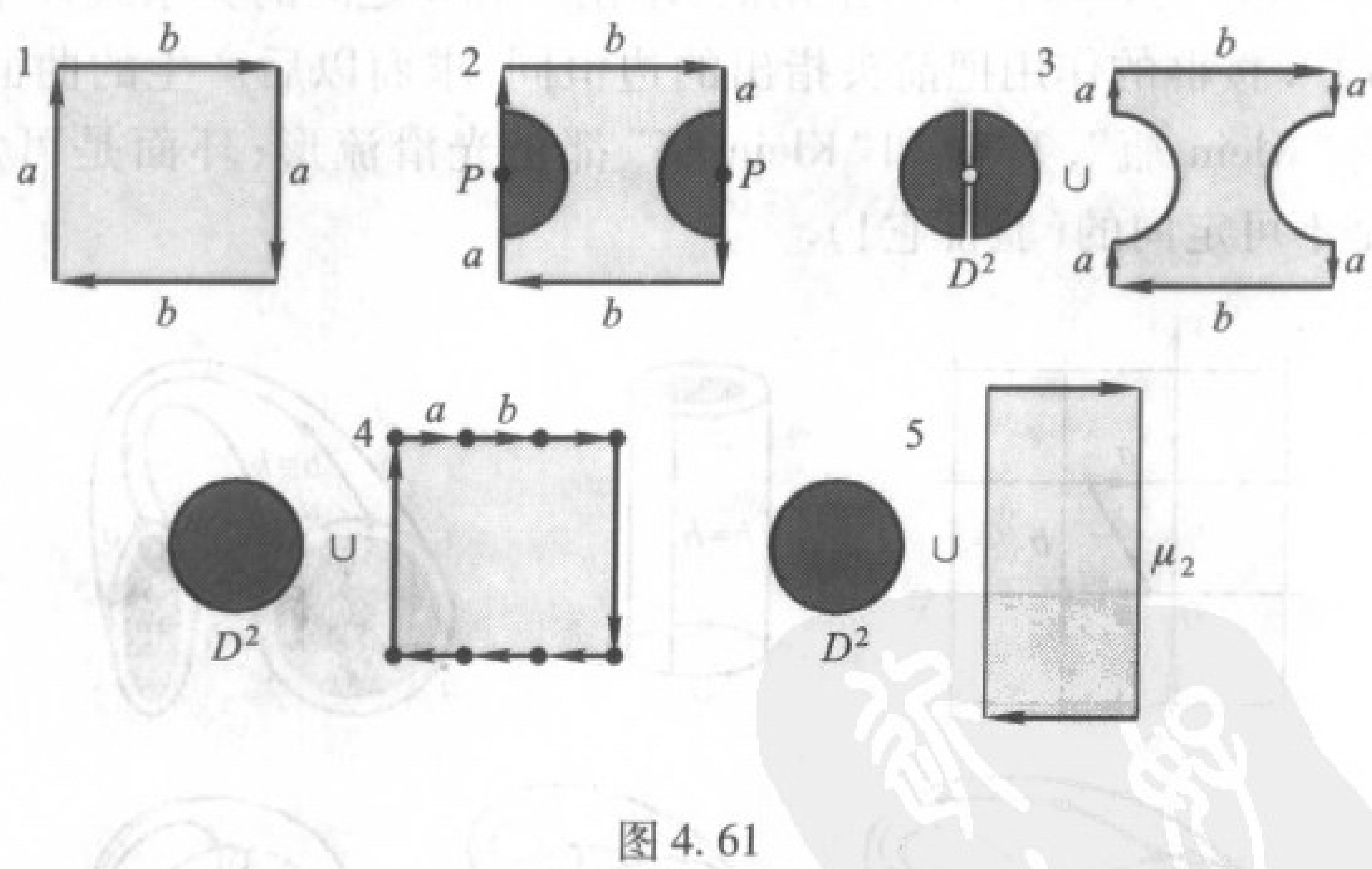


图 4.61

等价的说法是: 如果从 $\boldsymbol{RP}^2$ 上去掉圆盘, 那么就留下 Möbius 带了.

从另外的观点来考察 T^2 和 $\boldsymbol{RP}^2$. 应用图 4.62 所表示的同胚, 可以认为由 S^2 删去两个圆盘并粘上代替它们的"柄"(参看图 4.62), 此"柄"同胚于 $S^1\times D^2$. 为了得到 $\boldsymbol{RP}^2$, 应该从 S^2 上删去一个圆盘并粘上代替它的 Möbius 带(参看图 4.62). 称这个程序为"粘合 Möbius 膜". 考虑球面粘合两个柄和球面粘合两个 Möbius 膜, 会得

到怎样的曲面？考察八边形(图 4.63)，在它的边界上配置了字母 a,b,c,d，依次(按顺时针方向)组成的字是 $W=aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. 实现粘合(参看图 4.63). 所得到的二维流形称为“8 字形圈”，它同胚于带两个柄的球面 S^2+2r(用 r 表示柄).

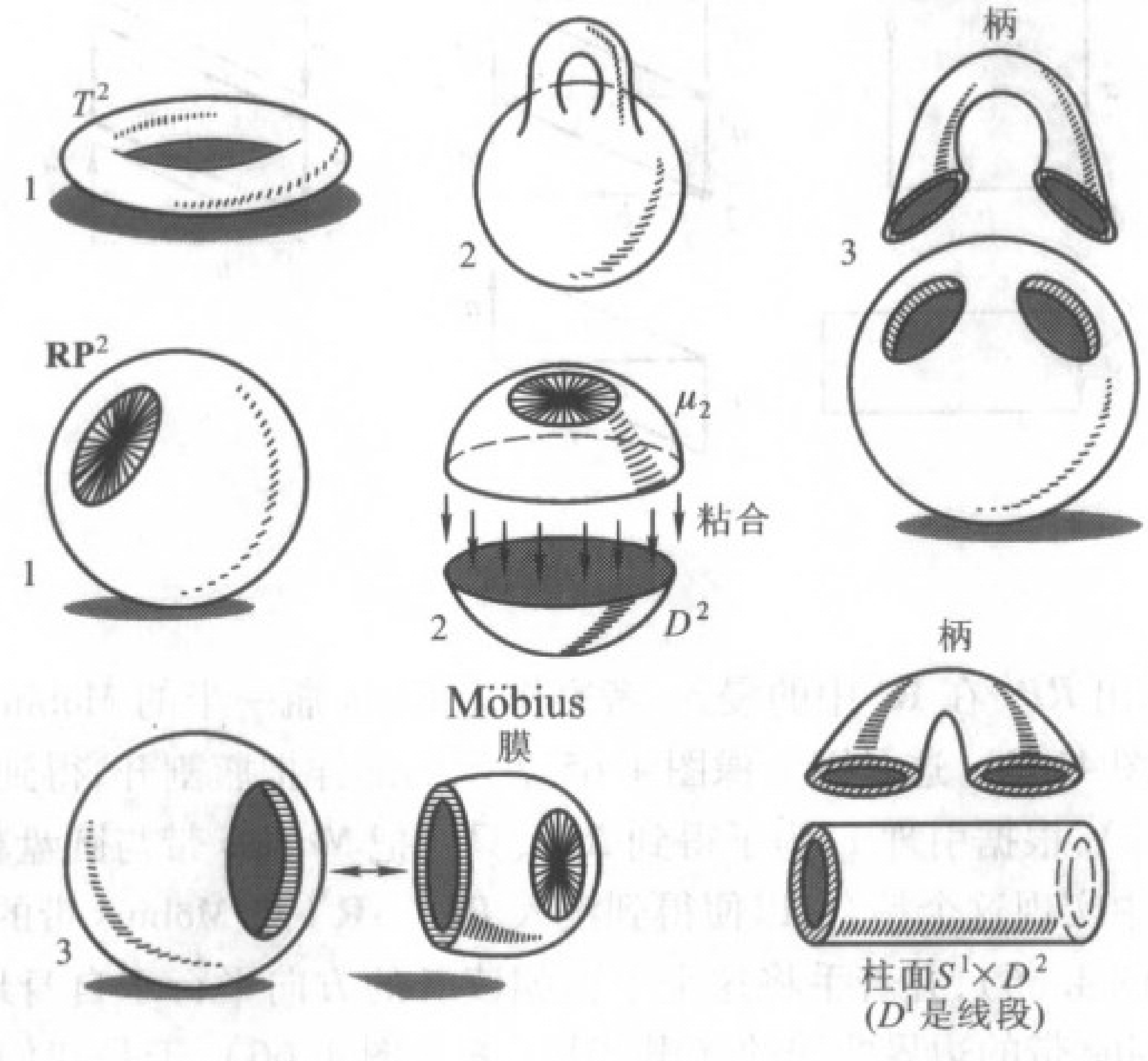


图 4.62

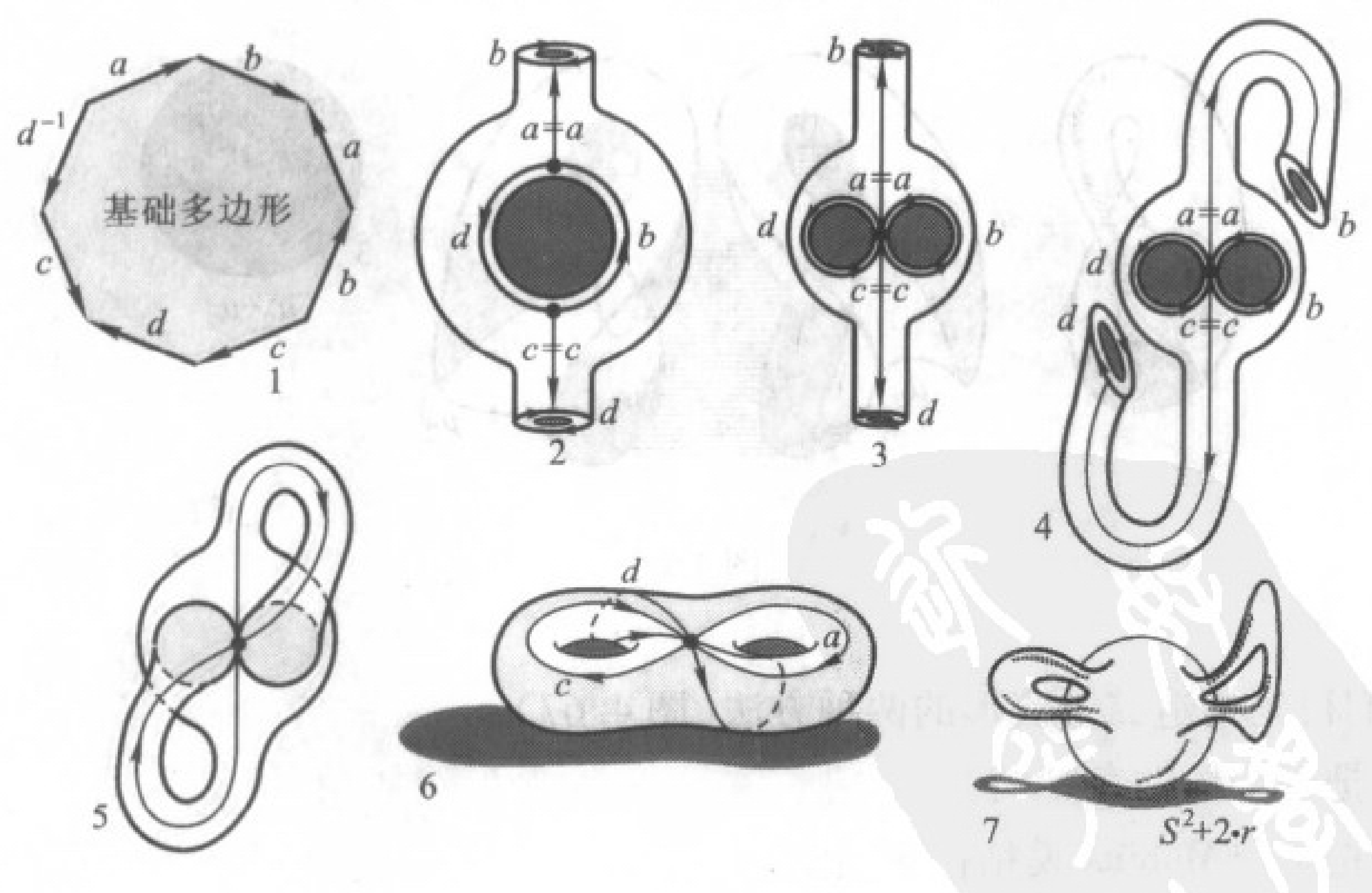


图 4.63

引理 2 Klein 瓶同胚于粘合了两个 Möbius 带的球面.

证明 参看图 4.64,两个 Möbius 带沿其共同边界的粘合等价于在带有两个孔的球面贴上这些带子(把两个 Möbius 膜贴在柱面上). 引理证毕.

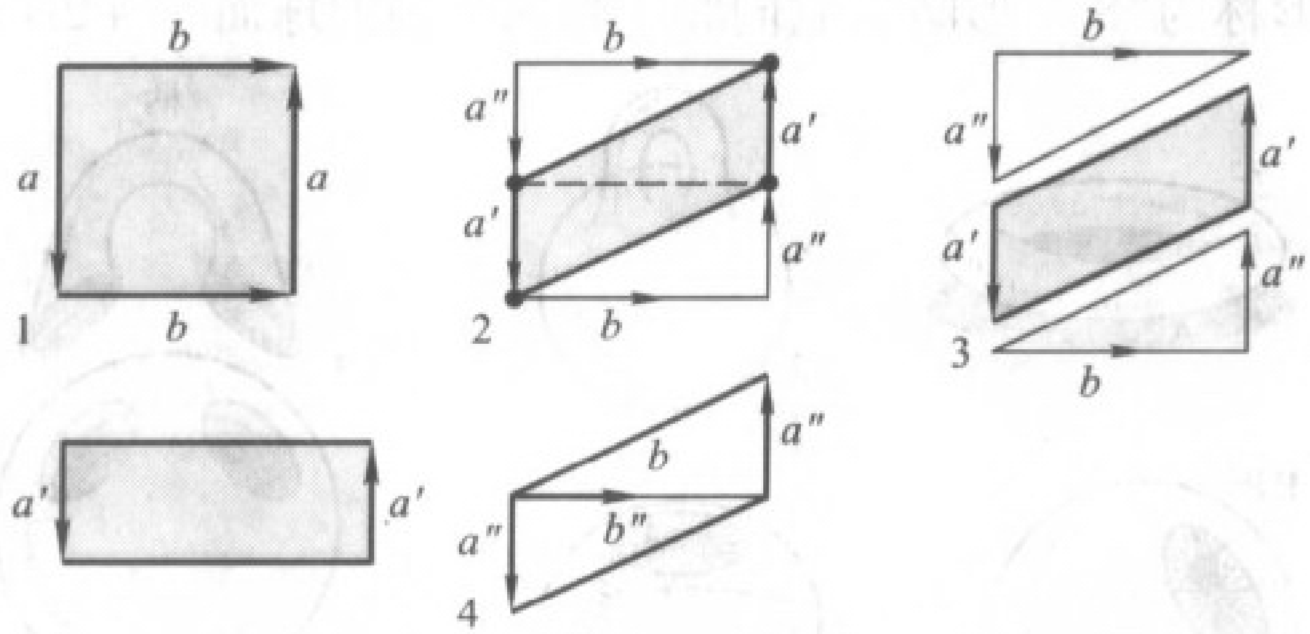


图 4.64

现在来作出 $\boldsymbol{RP}^2$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入. 考察作为 Klein 瓶一半的 Möbius 带在 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入(参看图 4.65). 这是因为像图 4.65 表示的那样把瓶割开,得到两个 Möbius 带(参看引理 2). 根据引理 1,为了得到 $\boldsymbol{RP}^2$,只要把 Möbius 带与圆盘粘合即可. 我们力求在 $\mathbf{R}^3$ 中实现这个粘合,以便得到浸入 $\boldsymbol{RP}^2\to\mathbf{R}^3$. 将 Möbius 带的边界安置于平面上(参看图 4.66),并着手将这个平面朝读者的方向平行于自身地移动. 这时便实现了 Möbius 带的边界曲线的光滑变形(参看图 4.66). 于是我们借助于带有变形圆周的曲面自动地建立了 Möbius 带的原来的浸入. 最后,圆周成为自不相交,并把它与圆盘粘合,这就给出所求的 $\boldsymbol{RP}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入.

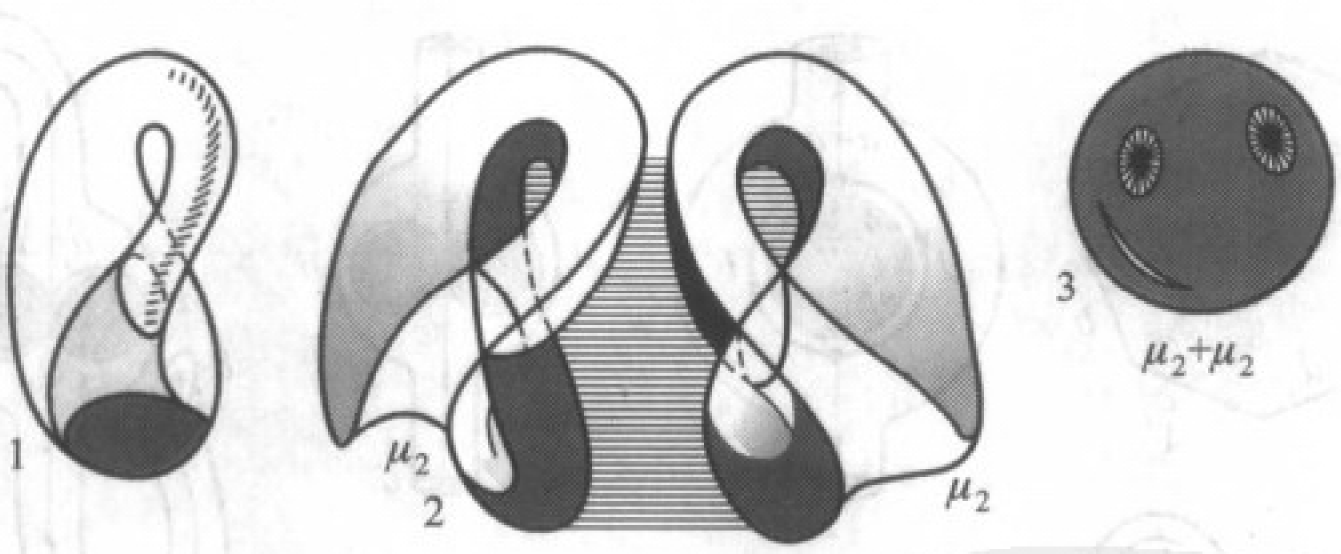


图 4.65

我们得到构造二维流形的两种方法(图 4.67):

1) 把 k 个柄粘在 S^2 上;

2) 把 s 个 Möbius 膜粘在 S^2 上.

从而得到两个系列的流形:

$$M^2_{g=k}=S^2+kr,M^2_{\mu=s}=S^2+s\mu_2.$$

M^2_g 是可定向的,而 M^2_μ 是不可定向的. 可以在 S^2 上同时粘合柄或 Möbius 膜,但是得

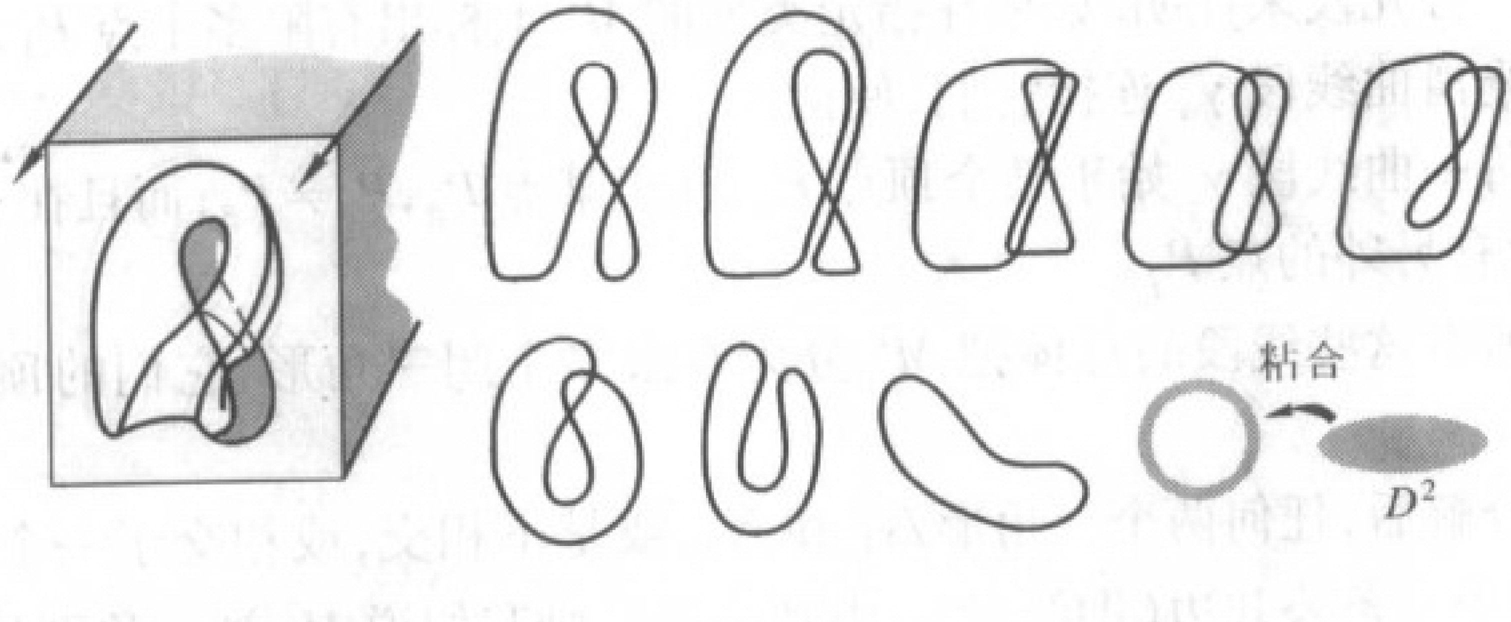


图 4.66

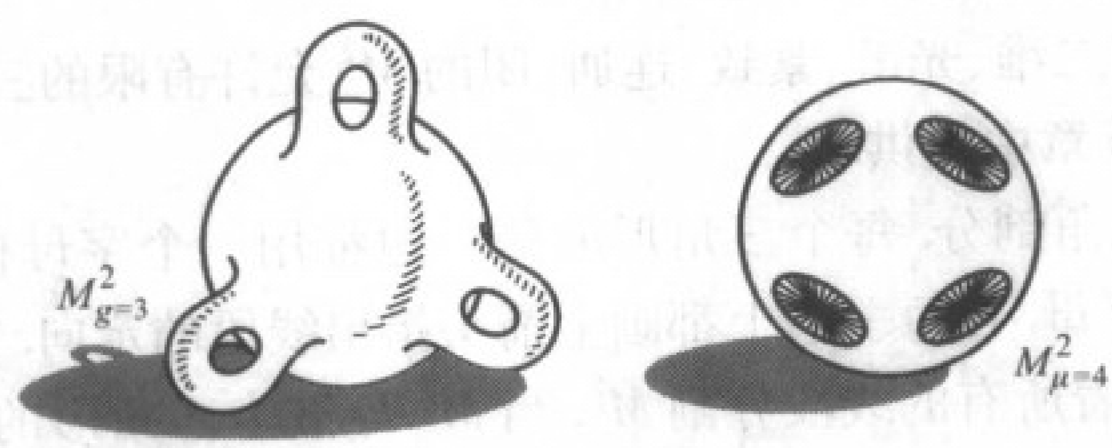


图 4.67

不到新的流形. 考察 $S^2+r+\mu$. 固定柄 r 的一个"脚掌"并开始沿着朝 Möbius 膜的方向移动另一个脚掌,然而,有 Möbius 膜的柄转化为两个 Möbius 膜(以后证明). 于是,$S^2+kr+s\mu\cong S^2+(2k+s)\mu$,即"混合型"流形同胚于"不可定向"的流形.

前面已经指出,所有 M_g^2 可以光滑地嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中. 我们证明不可定向的流形可以光滑地浸入 $\mathbf{R}^3$ 中. 对 $\boldsymbol{RP}^2=S^2+\mu$ 前面已经证明. 从图 4.68 得到,M_μ^2 是几个相同的 $\boldsymbol{RP}^2$ 的粘合(名为连通和). 把它们中的每一个,各自地浸入 $\mathbf{R}^3$ 时,就得到 M_μ^2 在 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入.

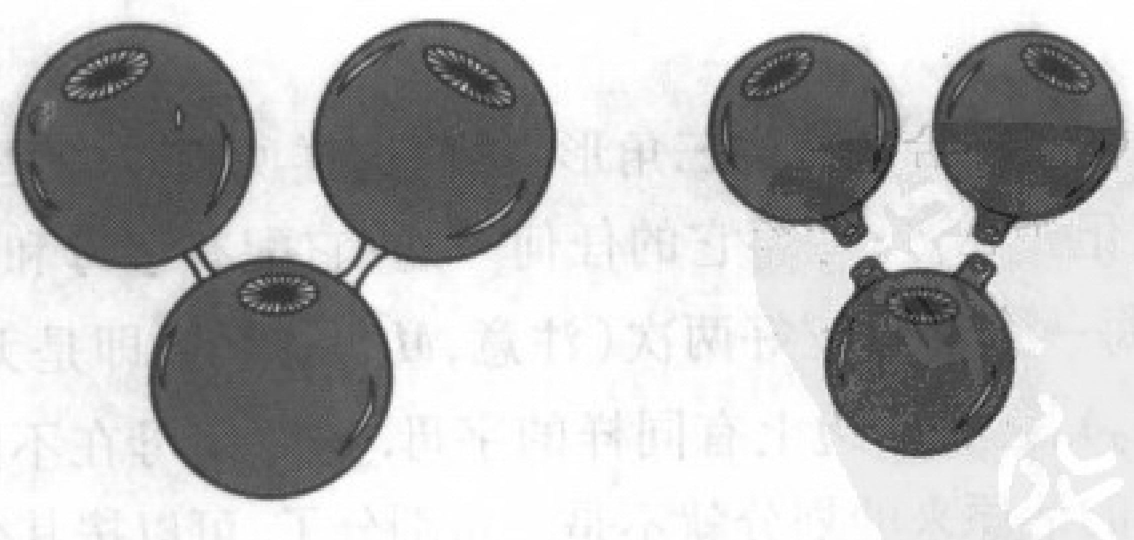


图 4.68

定理 2(分类定理) 任何光滑、紧致、连通、闭、二维流形或同胚于有 k 个柄的球面 S^2,或同胚于有 s 个 Möbius 膜的球面 S^2.

证明　分几段来证明. 如果在指定类型的 M^2 上标出有限多个点 $P_1,\cdots,P_N$,用有限多条光滑曲线段 γ_α 连接它们,使得:

(1) 每一曲线段 γ_i 始于某个顶点 P_α,终于某点 P_β,$P_\alpha\neq P_\beta$;而且在 γ_i 上除 P_α 和 P_β 外没有另外的点 P_γ;

(2) 所有这些线段的总体把 M^2 分为有限多个闭三角形,它们的顶点在集合 $\{P_\alpha\}$ 中;

(3) 分解后,任何两个三角形 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$,或是不相交,或相交于一个公共的顶点,或相交于一条公共边(即线段 γ_i 中某一条),则我们说 M^2 被三角剖分.

练习　作出环面、射影平面和 Klein 瓶的三角剖分.

同一个流形允许有无限多种三角剖分.

引理 3　任何二维、光滑、紧致、连通、闭的 M^2 允许有限的三角剖分.

证明将在第五章中提供.

考察 M^2 的三角剖分. 每个三角形的每一边都用一个字母标出. 并且,不同的线段标以不同的字母. 在每一边上都画上箭头指出线段的定向. 箭头的方向的配置可以是任意的. 沿着所有的线段分割 M^2. 当 M^2 分散为三角形的有限集合时,在三角形的每一边上已都有某个字母和箭头. 我们约定,在沿某一线段分割 M^2 时,在割线两侧都写上的是原标在该线段上的那个字母和箭头(参看图 4.69).

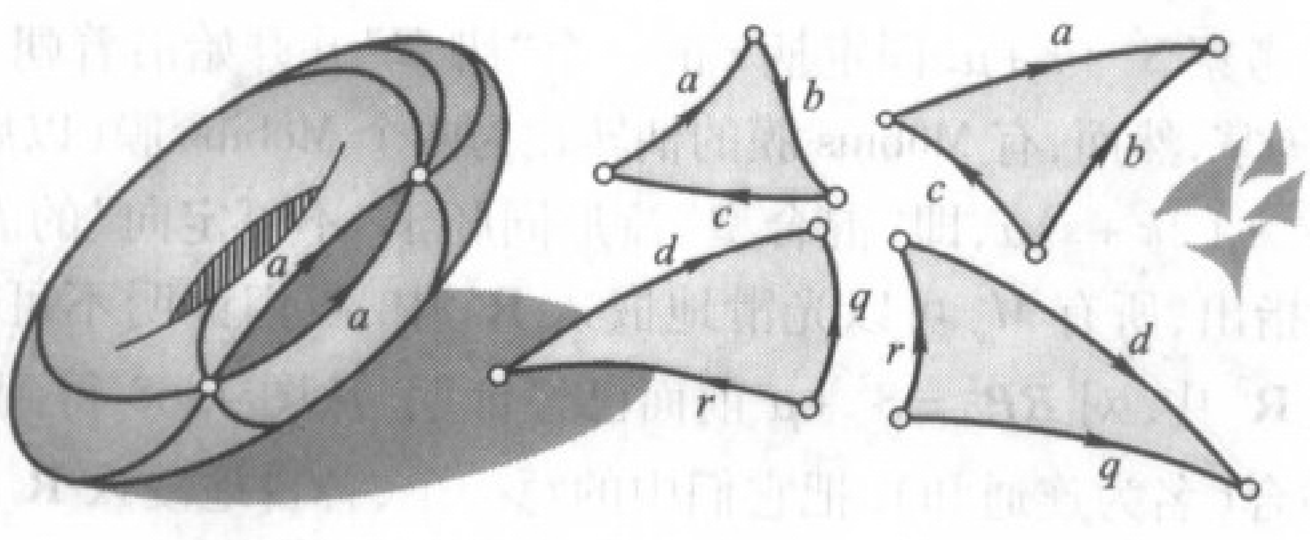


图 4.69

我们的目标:往回粘合所有的三角形,然而这样所得到的是平面多边形. 选择任意一个三角形(记为 $\triangle_1$);考察它的任何一边;它配有字母和定向;因为加入到三角形公共边的每一个字母正好两次(注意,M^2 是闭的,即是无边界的),找出一个三角形(记为 $\triangle_2$),在它的边上有同样的字母. 这个字母在不同于 $\triangle_1$ 的三角形上找到,因为否则的话原来的划分就不是三角剖分了. 可以按其公共边对准箭头的方向粘合 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$. 于是得到一个平面图,它的边界配置了字母和箭头. 再取某一个字母,并找出 $\triangle_3$,它有一条边有同一字母. 粘合 $\triangle_3$ 等等. 在所有的三角形取完时结束这个过程.

我们粘合所有的三角形成平面图形. 因为如果在某个时刻,所得到区域的任何

边界的字母不出现在尚未粘合的三角形的边的字母之中时，那么粘合所有成对的字母，就回到原来的 M^2（粘合后消灭了割口），根据假设这个 M^2 就会是不连通的，这与命题的条件相矛盾. 于是得到平面多边形 W.

（1）平面多边形 W 不是唯一确定的，甚至在确立了三角剖分时也不是唯一确定的.（2）边界 ∂W 由偶数条边组成.（3）每一条边都有一个字母和箭头；每一个字母进入边界两次.

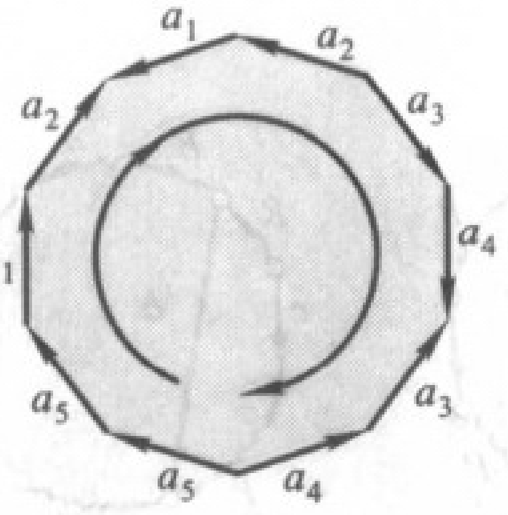


图 4.70

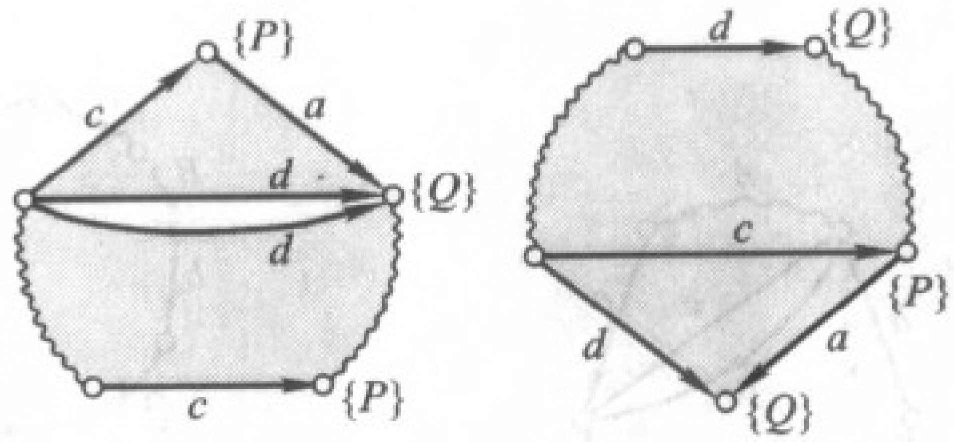


图 4.71

在 W 上确立定向，从边界的任一个顶点 P 开始围绕边界一周，依次地写出所有字母. 如果环绕的方向与相应字母的箭头一致，则字母以 $+1$ 次幂进入 W；否则，字母为 -1 次幂. 返回到 P 后，得到词 $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_\alpha = \pm 1$；这个词唯一地给出多边形 W（参看图 4.70）.

使每一个在某个三角剖分下的 M^2 与词 W 相对应（不是唯一的）. 词 W 可看作 M^2 的"密码".

引理 4　词 W 可以（借助于 M^2 的同胚和新的分割组）改造成多边形 W 的所有顶点粘合到一个点.

证明　把 W 的顶点划分为等价的顶点类. 两个顶点如果在 ∂W 上实现边的等同时，它们粘合为一点，则认为此两个顶点是等价的. 若 W 仅有一个等价顶点类，则引理证毕. 设 W 至少包含两个等价的顶点类：$\{P\}$ 和 $\{Q\}$. 可以认为存在边 a，其始点属于 $\{P\}$，而终点属于 $\{Q\}$. 如图 4.71 所表明，实现 W 的改造. 得到多边形 W'，其中，$\{P\}$ 顶点减少一个；$\{Q\}$ 顶点增加一个. 用这样的方法减少 $\{P\}$ 顶点数，直到 $\{P\}$ 顶点无一个留下. 最后的一步：因为在 $\{P\}$ 中只有一个顶点，所以邻接的边有形式：a, a^{-1}（参看图 4.72）. 引理证毕.

引理 5　设 $W = Abaa^{-1}cB$，则存在 M^2 的同胚和新的分割组，把 W 变换为词 $W' = AbcB$.

证明　参看图 4.72. 这里用 A 和 B 表示 W 的部分，在改造 W 时是不变的.

引理 6　如果 $W = BaAaC$，则存在 M^2 的同胚和新的分割组，使 W 转变为 $W' = BA^{-1}aaC$.

证明　参看图 4.73.

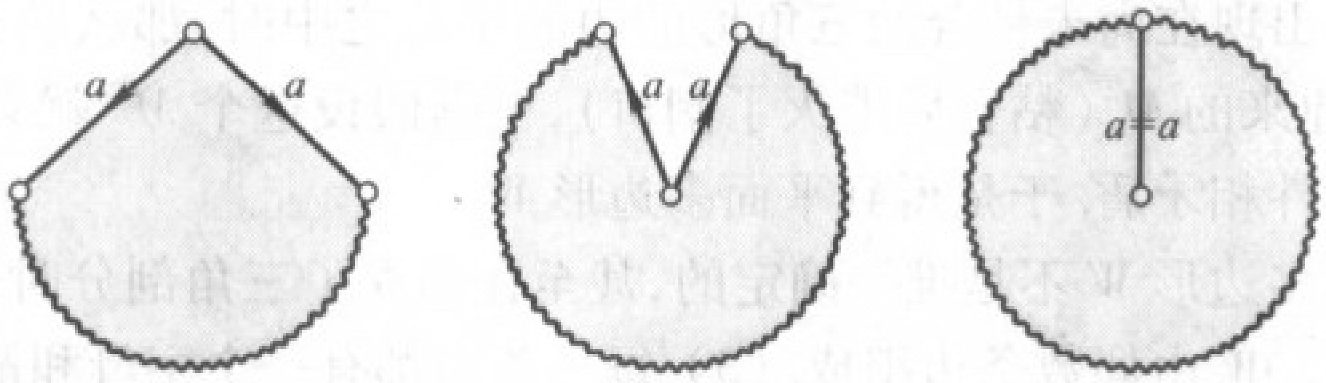


图 4.72

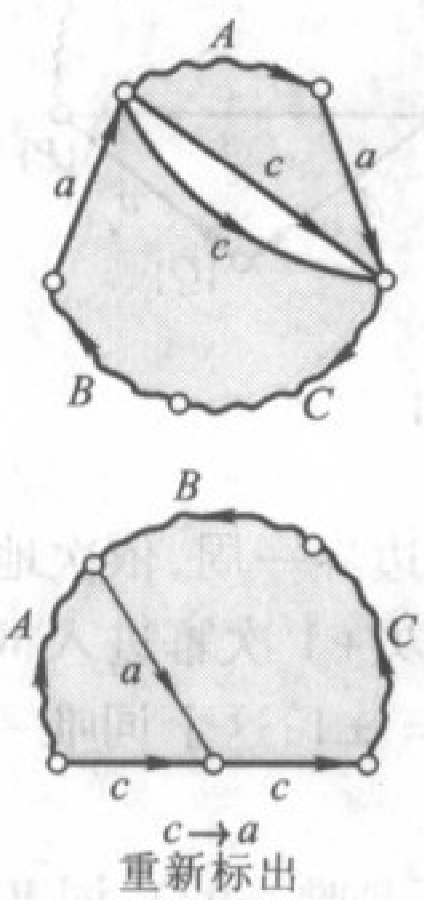


图 4.73

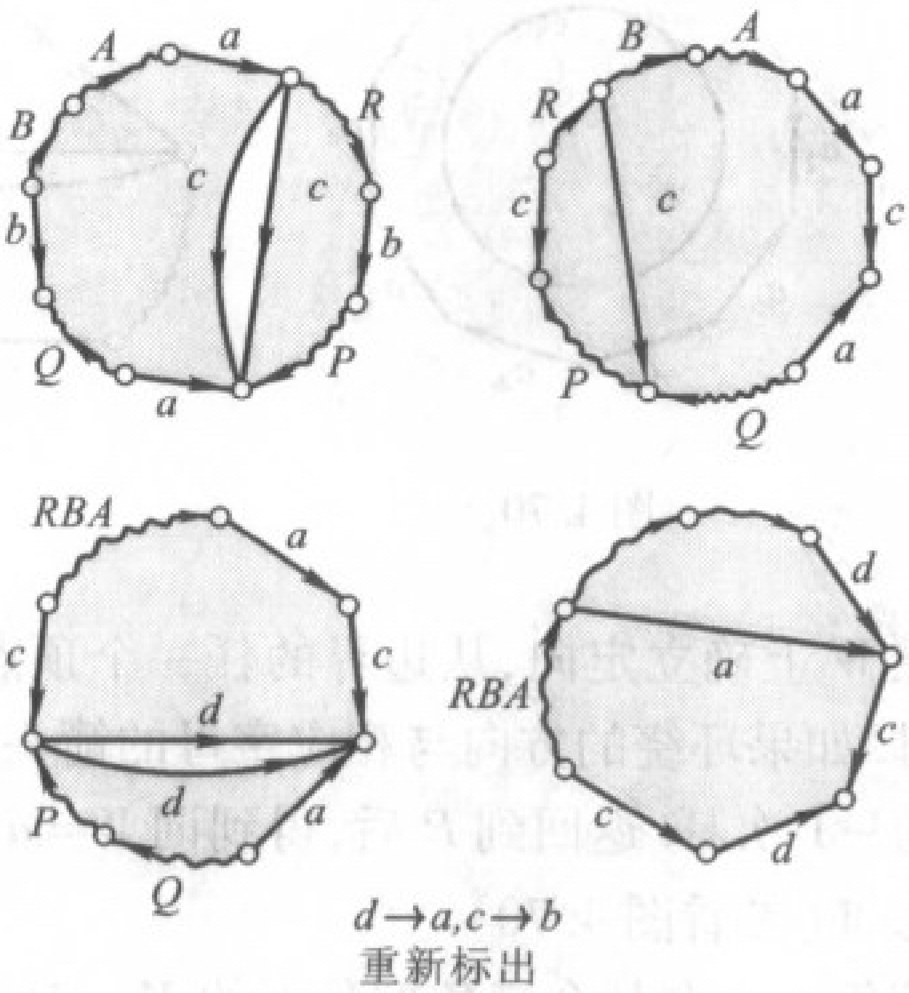


图 4.74

引理 7 如果 $W = AaRbPa^{-1}Qb^{-1}B$，则存在新的分割组把 W 变换为 $W' = AQPaba^{-1}b^{-1}RB$.

证明 参看图 4.74.

引理 8 如果 W(在 W 上完成了上述的操作)含有一对字母 a 和 a^{-1} 的边：$W = AaBa^{-1}C$，而且 $B \neq \varnothing$，则存在一对边 b, b^{-1}，使 $W = AaDbQa^{-1}Rb^{-1}T$，其中 $B = DbQ$；$C = Rb^{-1}T$，即对任何一对边 a, a^{-1}(这里 $B \neq \varnothing$)，存在与它相“衔接”的一对边 b, b^{-1}.

证明 用反证法. 设对于任何 $b \in B$，有相应的字母 b^{ε}($\varepsilon = \pm 1$)落入同一的词 B 中. 按 a 对 W 实现粘合. 结果参看图 4.75. 于是，W 的所有顶点至少分为两类等价的顶点. 因为可将引理 4 的操作用于 W，所以得到矛盾. 剩下的是要证明 $\varepsilon = -1$. 假如 $\varepsilon = +1$，则得到与引理 6 所建立的 W 的矛盾. 引理证毕.

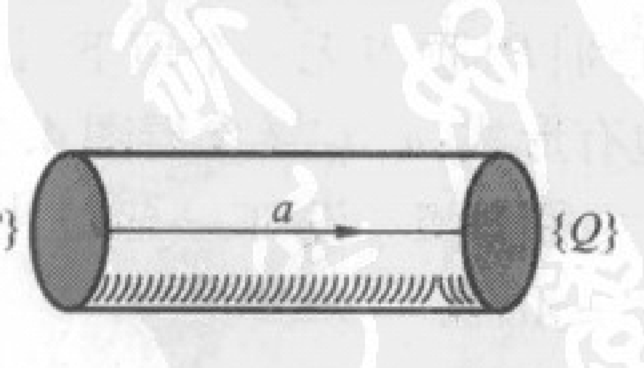


图 4.75

于是 W 化为表示式 $aba^{-1}b^{-1}$(换位)与 cc(平方)的乘积. 其余的就是

$aba^{-1}b^{-1}$或cc在词中相遇的情况.

引理 9 如果 $W = Aaba^{-1}b^{-1}BccQ$,则存在新的分割组,把 W 变为 $W' = Mp^2q^2d^2N = Aabd^{-1}B^{-1}bad^{-1}Q$.

证明 参看图 4.76. 这个操作化 W 为词

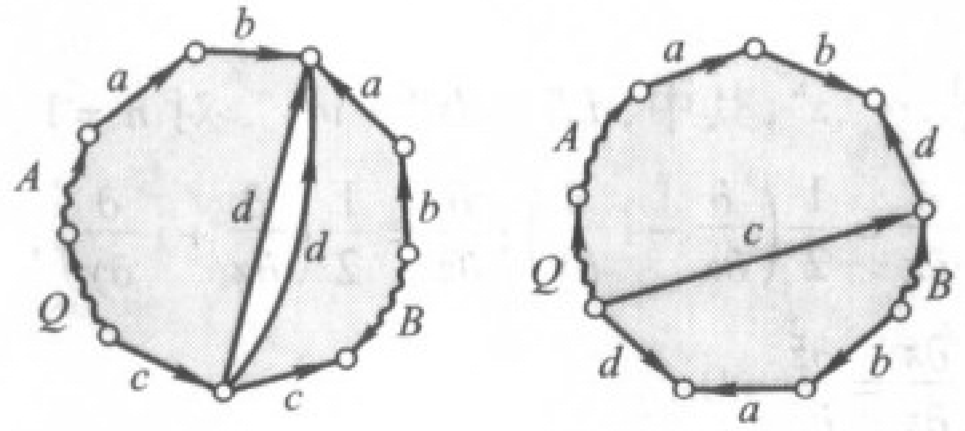


图 4.76

$$\widetilde{W} = Aabd^{-1}B^{-1}bad^{-1}Q.$$

剩下的是把三个平方"收集在一起",引理 6 可以完成它. 引理证毕.

因此,"混合型"流形同胚于不可定向流形. 综合所证明了的引理,得到:

引理 10 设 W 是 M^2 的一个密码. 那么存在新的分割组,把 W 化为下面的形式之一:

(1) $W = aa^{-1}$;

(2) $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;

(3) $W = c_1c_1c_2c_2\cdots c_kc_k$.

什么样的流形符合这三种类型? 情形(1):显然 M^2 同胚于球面(图 4.77). 情形(2):M^2 表示带 g 个柄的 S^2. 数 g 称为曲面的类型. 情形(3):M^2 同胚于带 k 个 Möbius 膜的球面.

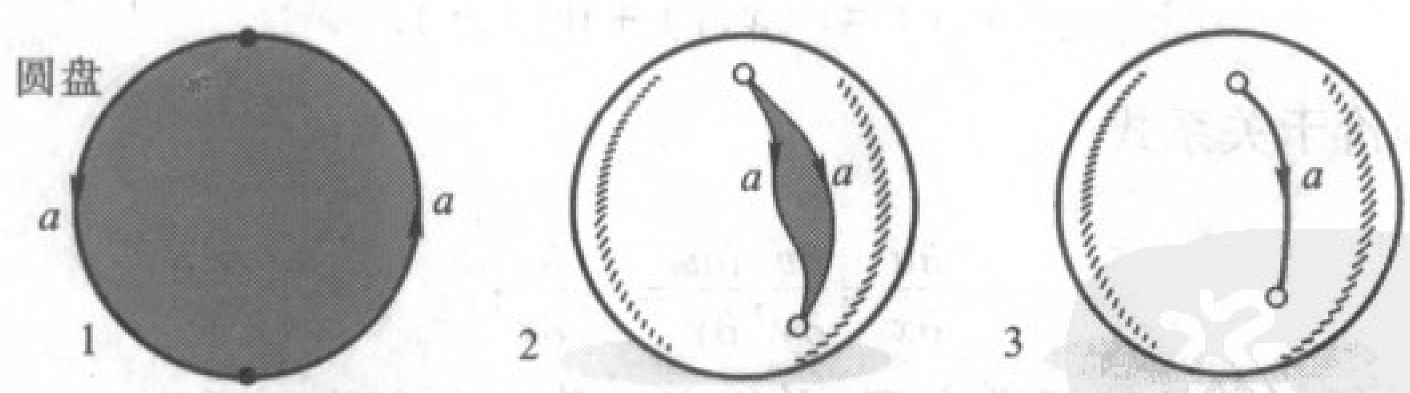


图 4.77

还存在 M^2 的另一个方便的表示法.

定理 3 任何光滑、紧致、连通、闭、二维曲面 M^2 可以表示为形式:$W = a_1a_2\cdots a_Na_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{N-1}^{-1}a_N^{\varepsilon}$,这里,当且仅当 $M^2 = M_g^2$(可定向的)时,$\varepsilon = -1$,此时 N 为偶数;当且仅当 $M^2 = M_\mu^2$(不可定向的)时,$\varepsilon = +1$,此时 N 为任何正整数.

证明不复杂,留给读者.

对流形 M_g^2,当 $g_1=g_2$ 时,相互是不同胚的,对 M_μ^2,当 $\mu_1\neq\mu_2$ 时,是不同胚的,M_g^2 与 M_μ^2 是不同胚的,这里只是给出这个事实,由于工具不具备,不给出证明.

4.6　作为二维流形的代数函数的黎曼曲面

设 $\mathbf{C}^n$ 的坐标为 $z^1,\cdots,z^n$,其中,$dz^\alpha=dx^\alpha+\mathrm{i}dy^\alpha$. 对 $n=1$,有

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right);\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar z}=\frac{\partial \bar z}{\partial z}=0.$$

把 $\mathbf{C}^n\{z^k\}$ 等同于 $\mathbf{R}^{2n}\{x^k,y^k\}$;这时,已知可把任何有理整函数 $f(z^1,\cdots,z^n)$ 表示为:$g(x^1,y^1,\cdots,x^n,y^n)$. 反之,可把任何有理整函数 $g(x^1,y^1,\cdots,x^n,y^n)$ 表示为 $f(z^1,\bar z^1,\cdots,z^n,\bar z^n)$.

引理 1　当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar z^\alpha}\equiv 0$ 时,有理整函数 $f(z^1,\bar z^1,\cdots,z^n,\bar z^n)$ 不依赖于 $\bar z^\alpha$.

证明　一方面结论是显然的. 现在验证,若 $\frac{\partial f}{\partial \bar z^\alpha}\equiv 0$,则 $f(z^1,\bar z^1,\cdots,z^n,\bar z^n)$ 不包含变量 $\bar z^\alpha$. 如若不然,把 f 表示为 $\bar z^\alpha$ 的各次幂的多项式:$f=\omega\cdot(\bar z^\alpha)^p+\cdots$,其中系数 $\omega,\cdots$ 不依赖于 $\bar z^\alpha$. 设 p 是 $\bar z^\alpha$ 的最大次幂的次数;这时 $\frac{\partial f}{\partial \bar z^\alpha}=p\cdot\omega(\bar z^\alpha)^{p-1}+\cdots$,这与定理的条件矛盾. 引理证毕.

对函数 $f(z^1,\bar z^1,\cdots,z^n,\bar z^n)$,若 $\frac{\partial f}{\partial \bar z^\alpha}\equiv 0,1\leqslant\alpha\leqslant n$,则称函数 f 为解析的. 在 $n=1$ 时,有

$$f(x,y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

条件 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ 等价于关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x};$$

需要证明的是复函数的隐函数定理. 在复变函数论中有此证明.

命题 1　设 $f(z,w)$ 是 $\mathbf{C}^2(z,w)$ 上的复解析函数;若关于变量 w 的方程 $f(z,w)=0$ 在某点 $P_0\in\{f=0\}$ 满足关系式 $\frac{\partial f}{\partial w}\neq 0$. 则在 $\mathbf{C}^2$ 中存在点 P_0 的开邻域 $U(P_0)$,在此邻域中存在函数 $w=g(z)$,满足:(1) $g(z)$ 是复解析函数;(2) 函数 $w=g(z)$ 在邻域 $U(P_0)$ 中是方程 $f(z,w)=0$ 的解,即 $f(z,g(z))=0$ 在 $U(P_0)$ 中成立,并且这个解在 $U(P_0)$ 中是唯一的.

以"图"的形式来考察解 $w=g(z)$,在几何上是方便的(参看图 4.78).

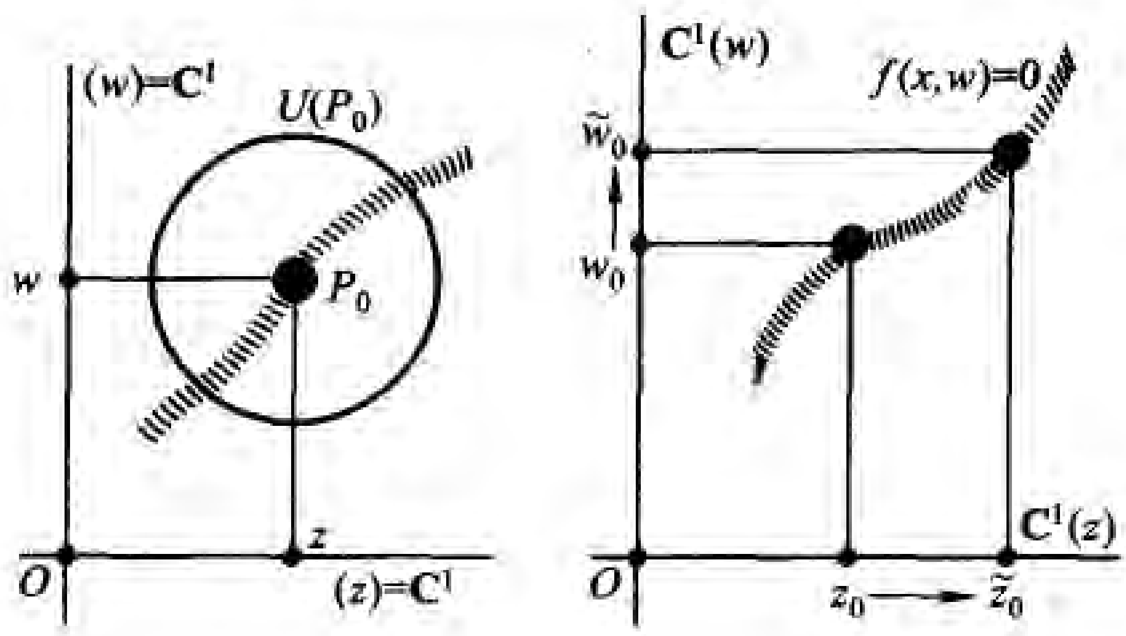


图 4.78

定义 1 设$f(z,w)$是$\mathbf{C}^2$上变量z,w的多项式,并设方程$f(z,w)=0$在某个开邻域$U(P_0)$中关于w是可解的$\left(\text{例如,设}\frac{\partial f}{\partial w}\neq 0\right)$. 则这个方程的解函数$w=g(z)$称为代数函数,而满足$f(z,w)=0$的点$(z,w)$的总体(即函数$f(z,w)$的零水平曲面)称为对于代数函数$w=g(z)$的黎曼曲面,在这些点上定义了$w=g(z)$.

若在点$P_0=(z_0,w_0)$有$\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$,则局部地存在解$z=\varphi(w)$,即从方程$f=0$可以解出$z$. 同时$\varphi(w)$满足命题 1 的条件(1),(2). 于是方程$f(z,w)=0$的局部可解性条件为$\mathrm{grad}\, f=\left(\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial w}\right)\neq 0$,这里$\mathrm{grad}\, f$为函数$f$的"复梯度".

把多项式$f(z,w)$写为一般形式,例如把它按z的幂展开:$f=a_0(w)z^n+a_1(w)z^{n-1}+\cdots$. 其中的系数$a_k(w)$,$0\leqslant k\leqslant n$,是$w$的多项式. 立即看出代数函数的黎曼曲面的性质:曲面是非紧致的,并且在$\mathbf{C}^2$中"向无穷远延伸". 事实上,对任何点w_0,就有关于z的方程

$$a_0(w_0)z^n+a_1(w_0)z^{n-1}+\cdots=0;$$

根据已知的代数定理,此方程总有复数根,即存在点z_0,因为f是多项式,所以能够把CP^2中的非齐次坐标转为齐次坐标:x^1,x^2,x^3,设$z=\frac{x^1}{x^3}$,$w=\frac{x^2}{x^3}$. 这时,$f(z,w)=\sum a_{pq}w^pz^q$化为齐次多项式$\sum a_{pq}\cdot(x^1)^q(x^2)^p(x^3)^{s-(p+q)}$,这里$s$是单项式$w^pz^q$的最大次数;那么,由$\mathbf{C}^2$转到$CP^2$时,可以使黎曼曲面"紧致化". 因为方程$g(x^1,x^2,x^3)=0$在$CP^2$上是多项式,所以这个曲面在$CP^3$中的水平面是紧致的. 在这里不准备涉及这个紧致化的详细情节,因为对我们不是必需的.

现在来研究黎曼曲面的拓扑. 从实的观点看,方程$f(z,w)=0$在$\mathbf{R}^4$中分解为:$\mathrm{Re}(f)=0$和$\mathrm{Im}(f)=0$,即在"一般位置"的点,集合$f=0$是二维的(实)曲面.

定理 1 设多项式$f(z,w)$有形式$f=w^q-P_n(z)$;并且$P_n(z)$没有重根. 则方程$f(z,w)=0$在$\mathbf{C}^2(z,w)$中确定了光滑的二维(在$\mathbf{R}$上)子流形(一维复代数曲线).

证明　设 $P_0(z_0,w_0)$ 属于 $\{f=0\}$，并且 $w_0\neq0$；这时在 P_0 有 $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{P_0}=qw_0^{q-1}\neq0$，按隐函数定理，在 P_0 的某个邻域中，曲面 $\{f=0\}$ 是光滑的二维子流形——代数函数 $w=g(z)$ 的图. 在现在情形下，解 $w=g(z)$ 有形式 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$. 剩下考察点 $P_0=(z_0,0)$. 然而

$$\operatorname{grad} f(P_0)=\left(-\frac{dP_n(z_0)}{dz},0\right)\neq0.$$

事实上，假如 $\frac{d}{dz}P_n(z_0)=0$，那么在点 $(z_0,0)$ 有 $P_n(z_0)=0$ 和

$$\frac{d}{dz}P_n(z_0)=0.$$

由此，z_0 是 $P_n(z)$ 的重根，与定理的条件矛盾. 于是在曲面 $\{f=0\}$ 的所有点，

$$\operatorname{grad} f(P_0)\neq0.$$

最后应用隐函数定理即可. 定理证毕.

代数函数的基本性质：

(1) 代数函数通常是多值的，即对应于自变量 z 的某个值有函数 $w=g(z)$ 的好几个值. 例如：$w=\sqrt{z}$，若每个 $z_0\neq0$，则有两个值 $w=\pm\sqrt{z_0}$ 同时与一个 z_0 相对应.

考虑射影 $\pi:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^1(z)$，$\pi(z,w)=(z,0)$；任何点 z_0 在射影 $\pi:\Gamma\to\mathbf{C}^1(z)$ 下的原像恰好是函数 $w=g(z)$ 在点 z_0 的所有函数值(图 4.79). 因为函数 $w=g(z)$ 是多项式，所以曲面 Γ 在射影 $\pi:\Gamma\to\mathbf{C}^1(z)$ 下的像是整个平面 $\mathbf{C}^1(z)$(参看上面).

作变量变换：写 $w=g(z)$ 为形式 $w=\rho(P)$，$P\in\Gamma$ 是曲面 Γ 上的变点(参看图 4.79). 显然，$w=\rho(P)$ 在黎曼曲面上是单值函数. 于是代数函数将是单值的，为此不得不使函数自变量变化区域复杂化. 代替原来 z 在其中变化的 $\mathbf{C}^1(z)$，现在自变量 P 在曲面 Γ 上变化，这里 Γ 为二维流形. 于是，代数函数 $w=g(z)$ 的黎曼曲面是这个函数的单值化区域.

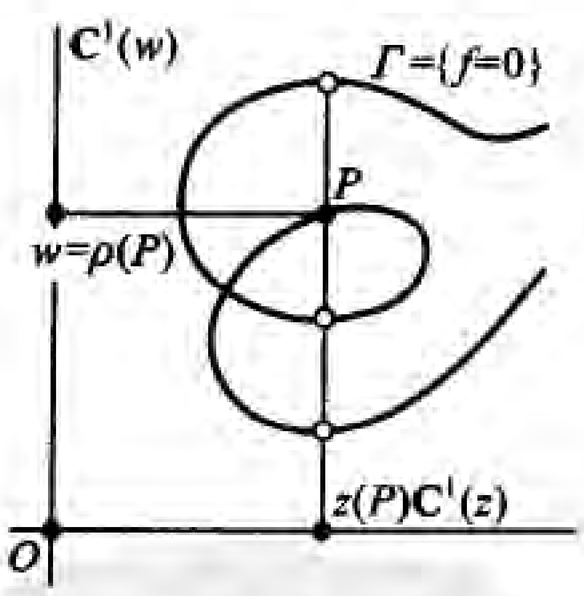


图 4.79

(2) 因为对每个 $z_0\in\mathbf{C}^1(z)$，存在多个值 $w_i=g(z_0)$(其个数等于多项式方程 $f(z_0,w)=0$ 的不同根的个数)，所以在每个 z_0 的开邻域中产生一组连续的函数：$w=\{\varphi_i(z)\}$，$1\leqslant i\leqslant k$，k 为多项式

$$a_0(z)w^k+a_1(z)w^{k-1}+\cdots+a_k(z)=f(z,w)$$

关于变量 w 的次数. 这组函数中的每一个函数都描述了方程

$$f(z,w)=0$$

的一个根在 z 变化时的变化. 函数 $\varphi_i(z)$ 可以延拓到整个平面上去；在某些点，它们可能重合，并且"交换轨迹". 函数 $\varphi_i(z)$ 称为代数函数 $w=g(z)$ 的分支. 在每个点

z_0 的上面"悬挂着"函数 $w=\varphi(z)$ 的值，这些函数值是方程

$$f(z_0,w)=a_0(z_0)w^k+a_1(z_0)w^{k-1}+\cdots+a_k(z_0)=0$$

的根. 由隐函数存在定理得到，每一个分支(几乎在所有点上)确定了 $\mathbf{C}^2$ 中光滑的，甚至是复解析的子流形，并称为黎曼曲面的一叶.

(3) 设 $k(z_0)$ 等于方程 $f(z_0,w)=0$ 的不同根的个数. 显然，$k(z_0)\leqslant k$. 若方程 $f(z_0,w)=0$ 的所有的根都是单根，则 $k(z_0)=k$；若有重根，则 $k(z_0)<k$. 在使 $k(z_0)<k$ 的点 z_0，函数 $w=g(z)$ 的某些分支 $\varphi_i(z)$ 合并在一起(参看图 4.80).

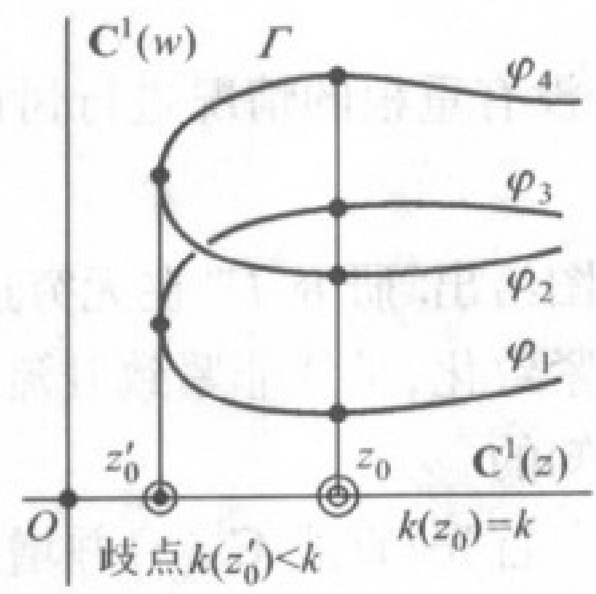


图 4.80

假设 $f(z,w)=w^q-P_n(z)$，多项式 $P_n(z)$ 没有重根. 根据定理 1，曲面 $\Gamma=\{f=0\}$ 是 $\mathbf{C}^2$ 中的复解析子流形. 使 $k(z_0)<k$ 的点 z_0，称为代数函数 $w=g(z)$ 的歧点. 在 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 的例子中，多项式 $P_n(z)$ 的根是歧点(在 $\mathbf{C}^1(z)$ 的有限部分).

(4) 在歧点，函数 $w=g(z)$ 的几个分支合并. 因为歧点是孤立点，所以可以认为它是足够小的圆盘 D^2 的中心，在此 D^2 中没有其他的歧点. 考察中心在 z_0 的位于 D^2 中的圆周，按此圆周作出绕 z_0 的环路. 这时，函数 $g(z)$ 的分支，一般，轨迹就要改变.

分析下面的例子. 设 $f=w^2-z$. 这时 $w=g(z)=\sqrt{z}$. 显然，$\varphi_1(z)=+\sqrt{z}$；$\varphi_2(z)=-\sqrt{z}$；若 $z=r\cdot e^{i\varphi}$. 那么，$0\in\mathbf{C}^1(z)$ 是平面有限部分的唯一歧点. 在绕点 O 一周时分支 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 交换位置

$$\varphi_1(z)=\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}\to-\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}=\varphi_2(z).$$

参看图 4.81 的这种交换的示意图. 黎曼曲面本身没有奇点，因为 Γ 是 $\mathbf{C}^2$ 的光滑子流形.

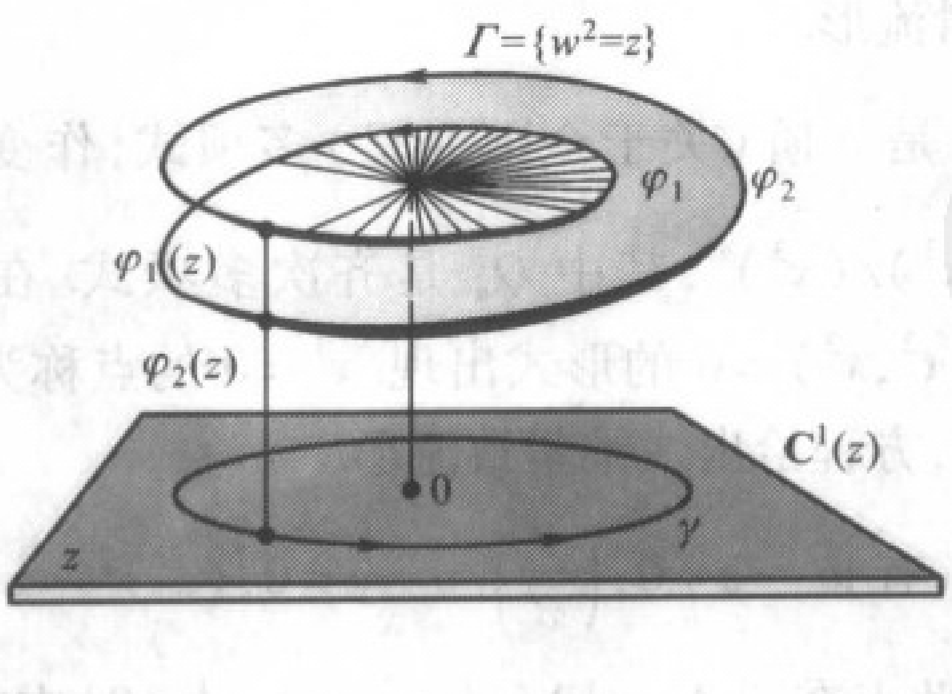


图 4.81

现在研究黎曼曲面的整体拓扑性质. 仅仅对

$$f(z,w)=w^2-P_n(z),$$

P_n 没有重根的情况进行讨论. 曲面 Γ 在 $\mathbf{C}^2$ 中作为

$$w=g(z)=\sqrt{P_n(z)}$$

的图给出. 研究 Γ"在无穷远点"的性状. 有不同方法给此概念以含义. 我们描述所谓紧致化,是使非紧致开流形"把边界列入"变为紧致流形. 几个紧致化的方法是已知的.

首先,直线 $\mathbf{C}^1(z)$ 并增加无穷远点成紧致直线. 结果得到 CP^1. 实际上,把 CP^1 看作点 $(\lambda z^1,\lambda z^2)(\lambda\neq 0)$ 的集合,取映射

$$h:(\lambda z^1,\lambda z^2)\to\frac{\lambda z^1}{\lambda z^2}=\frac{z^1}{z^2}\in S^2=\mathbf{C}^1(z)\cup\infty$$

即可.

注意,借助于球极射影可以作出扩大平面与球面 S^2 的等同.

现在来把 $\mathbf{C}^2$ 紧致化. 考察 CP^2,取齐次坐标 (x^1,x^2,x^3);这时,CP^2 被同胚于 $\mathbf{C}^2$ 的三个图所覆盖. 我们取其中一个,例如

$$A_3=\{\lambda(x^1,x^2,x^3),x^3\neq 0\}.$$

设

$$\alpha:A_3\to\mathbf{C}^2(z,w),$$

其中,$z=\dfrac{x^1}{x^3},w=\dfrac{x^2}{x^3}$. 则 α 是图 A_3 与 $\mathbf{C}^2$ 之间的同胚.

假设

$$CP^1=S^2=\{\lambda(x^1,x^2,0)\},$$

这时,$CP^2=A_3\cup S^2$,于是,$\mathbf{C}^2$ 紧致化变为 CP^2,这可用合并球面 S^2 的方法得到. 嵌入 $\mathbf{C}^2$ 中的黎曼曲面 Γ 发生什么变化? Γ 也变为紧致拓扑空间 $\tilde{\Gamma}$. 我们证明在单根的情况下,$\tilde{\Gamma}$ 是光滑流形.

一般,设 $g(z,w)$ 是 n 阶(关于全部变量)多项式,作变换 $z=\dfrac{x^1}{x^3},w=\dfrac{x^2}{x^3}$,得 $g(z,w)=Q_n(x^1,x^2,x^3)/(x^3)^n$,其中 Q_n 是齐次多项式. 在射影空间 CP^2,方程 $g(z,w)=0$ 以 $Q_n(x^1,x^2,x^3)=0$ 的形式出现. $x^3=0$ 的点称为黎曼曲面的"无穷远点". 在非特殊情况下,方程给出二维紧致流形.

例如,在 $n=1$ 时,有 $w^2-z=0$;$\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right)^2-\dfrac{x^1}{x^3}=0$;$(x^2)^2-x^1x^3=0$. $\tilde{\Gamma}$ 与无穷远球面 S^2 的交是一个点,此点在图 $A_1=\{\lambda(x^1,x^2,x^3),x^1\neq 0\}$ 中的坐标为

$$\alpha=\frac{x^2}{x^1}=0,\beta=\frac{x^3}{x^1}=0.$$

在这个点的邻域中,作变换:$\alpha=\frac{x^2}{x^1},\beta=\frac{x^3}{x^1}$,得到

$$[(x^2)^2-x^1x^3=0]\to[\alpha^2-\beta=0].$$

显然,这个方程在点 $\alpha=\beta=0$ 的邻域中确定了光滑流形,这就证明了曲面 $\widetilde{\Gamma}$ 在无穷远点的光滑性.

我们研究函数 $w=\sqrt{P_n(z)}$ 在整个球面 $S^2=CP^1$ 上确定的歧点.

命题 2 设 $w^2-P_n(z)=0$,$P_n(z)$ 仅有单根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 则所有这些点都是 $w=\sqrt{P_n(z)}$ 的歧点,这些点位于平面的有限部分;当 P_n 的次数是奇数时,在球面上,再添一个歧点——无穷远点. 对 P_n 是偶次时,点 ∞ 不是歧点. 函数 $w=\sqrt{P_n(z)}$ 没有其他的歧点.

证明 设 a_k 是 $P_n(z)$ 的任意一个根. 考察中心在 a_k 的小圆周 S^1,它的内部没有多项式的其他根,并把点 $z\in S^1$ 写为形式 $z=a_k+re^{i\varphi}$,r 是圆周的半径. 有

$$w(z)=\sqrt{\prod_{p\neq k}(z-a_p)}\cdot r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\varphi}{2}}$$

(参看图 4.82).

因为在围着 a_k 环绕时,$(z-a_k)$ 的辐角改变 2π,所以 $\sqrt{z-a_k}$ 改变符号. 同时,在围着 a_k 环绕时,数 $z-a_p$,$p\neq k$,它的辐角的改变量达不到 2π,即所有的根式 $\sqrt{z-a_p}$ 恢复到以前的值.

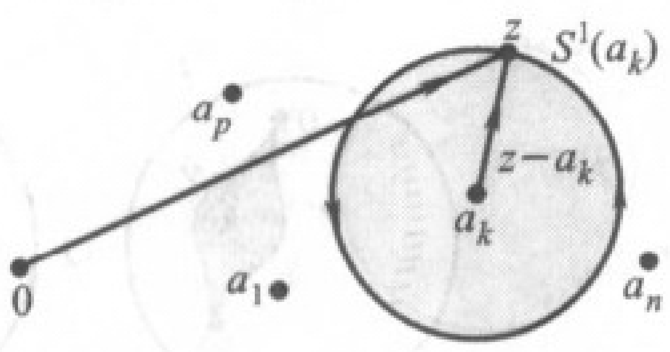


图 4.82

于是,$\{a_k\}$ 为歧点. 考察 ∞ 并作变换 $u=\frac{1}{z}$. 那么,$w=g(z)$ 取形式 $\frac{1}{\sqrt{u^n}\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1-a_ku}}$. 若 n 是偶数,很明显,0 不是歧点;若 $n=2p+1$ 是奇数,则有歧点. 命题证毕.

如所知,曲面 Γ 是代数函数的单值性区域. 把 Γ 设想为一些"叶"的粘合,而每一"叶"都是单值的代数函数的图像. 我们从例子讲起.

考察函数 $w=\pm\sqrt{z}$,它有两个歧点:0 和 ∞. 用无交点的光滑曲线 γ 连接 0 和 ∞,并沿 γ 从 0 到 ∞ 切开. 那么,结果是 Γ 为两个子集合的并:Γ_1 和 Γ_2,Γ_1 是分支 $\varphi_1=\sqrt{z}$ 的图像,定义在 $S^2\setminus\gamma$ 上;Γ_2 是分支 $\varphi_2=-\sqrt{z}$ 的图像,定义在 $S^2\setminus\gamma$ 上. 显然,在 $S^2\setminus\gamma$ 上,决不能从分支 φ_1 转到分支 φ_2. 即每一叶 Γ_1 或 Γ_2 都与 $S^2\setminus\gamma$ 同胚(图 4.83). 在射影 $\pi:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^1(z)$ 时,每一叶 Γ_1 或 Γ_2 都同胚地射影在 $S^2\setminus\gamma$ 上. 于是 Γ 是由两片(Γ_1 和 Γ_2 两叶)粘合在一起的. 怎样实现这样的粘合呢? 在 S^2 上给出定向并给切口的一边打上记号"-",另一边打上记号"+". 这些标记出现在每一叶(Γ_1 和 Γ_2)的切口的边上. 在粘合两个同样的 $S^2\setminus\gamma$ 时,应使符号"+"和"-"一

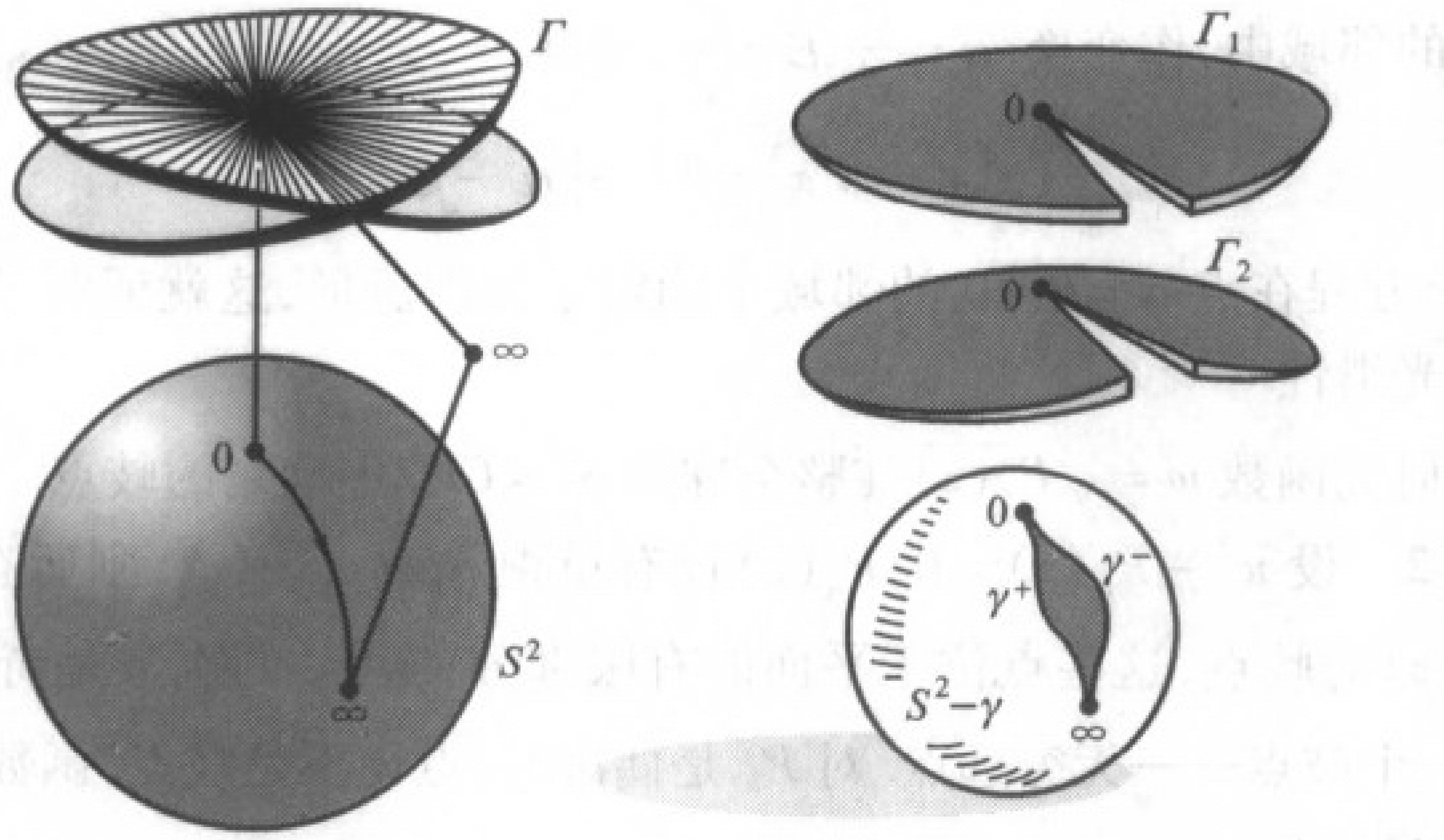


图 4.83

致. 因为在围着歧点环绕时,分支互相交换,所以叶 Γ_1 的边 γ_1^+ 应该与叶 Γ_2 上的边 γ_2^- 粘合;相应地,也粘合叶 Γ_1 和叶 Γ_2 上的边 γ_1^- 和 γ_2^+(参看图 4.84). 显然这个粘合给出了球面. 于是便证明了下面的引理.

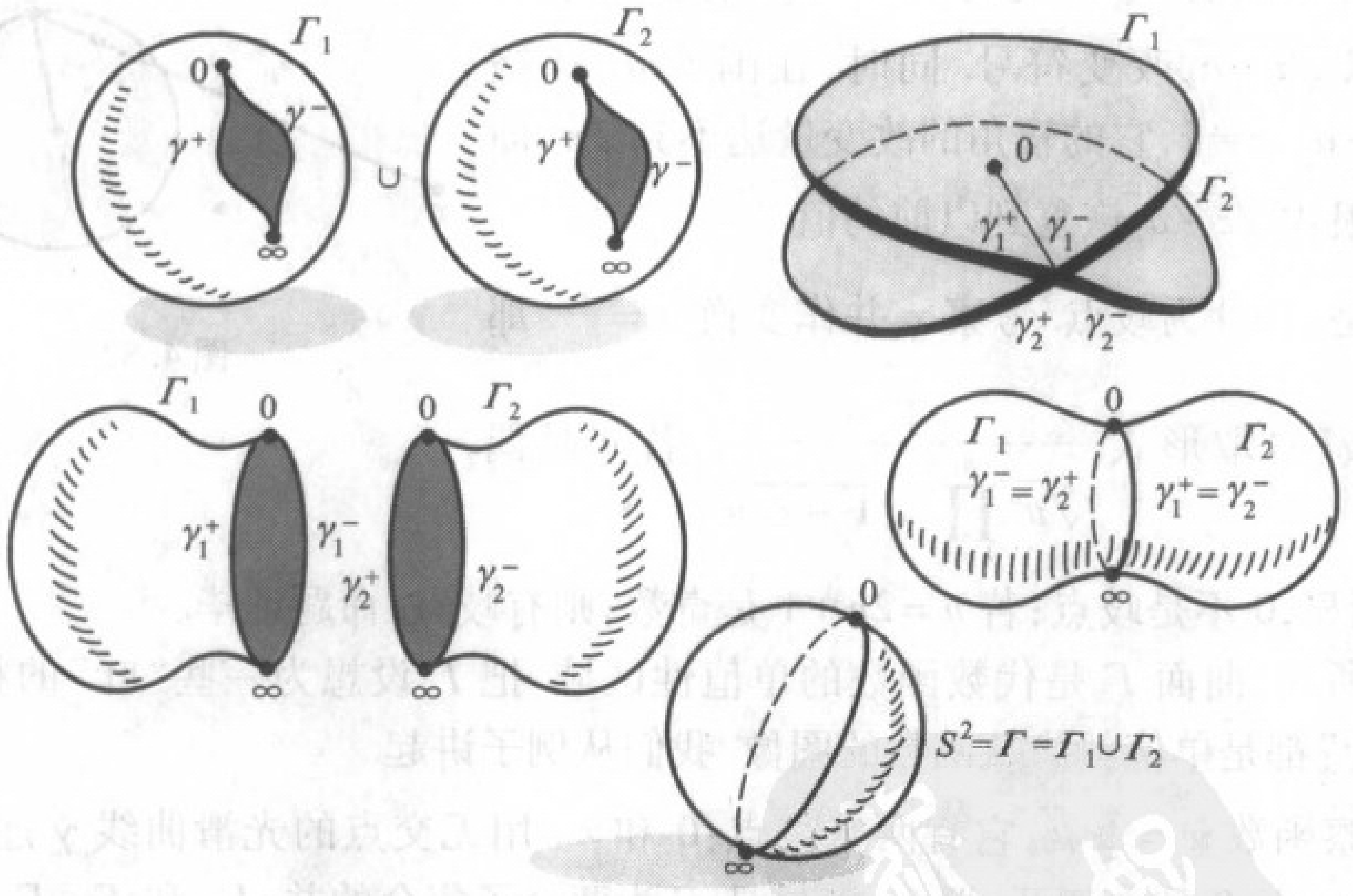


图 4.84

引理 2 代数函数 $w=\pm\sqrt{z}$的黎曼曲面的紧致化 $\widetilde{\Gamma}$ 同胚于球面 S^2.

考察函数 $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}, a\neq b$ 的黎曼曲面. 根据命题 2,这个函数有两个歧点:$z=a$ 和 $z=b$.

引理 3 代数函数 $w=\pm\sqrt{(z-a)(z-b)}$的紧致化后的黎曼曲面 $\widetilde{\Gamma}$ 同胚于二

维球面.

证明 a 和 b 是歧点,所以应该作出由 a 到 b 的截线 γ,重复引理 2 的论证,即可证明. 引理证毕.

定理 2 设 $f(z,w)=w^2-P_n(z)$,多项式 P_n 没有重根. 则代数函数 $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$ 的黎曼曲面的紧致化 $\widetilde{\Gamma}$ 同胚于带有 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 个柄的球面(用[ ]表示整数部分).

证明 设 $n=2p+1$;这时根据命题 2,所有的根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和点 ∞ 是歧点;这个集合可两两分组,例如:$(a_1,a_2),\cdots(a_n,a_{n+1})$,其中 $a_{n+1}=\infty$. 用光滑线段 γ_k, $1\leqslant k\leqslant p+1$,连接每一对点 a_{2k-1} 和 a_{2k},得到带有 $p+1$ 个截口 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{p+1}$ 的球面 S^2. 这时,在 $S^2\setminus(\gamma_1\cup\gamma_2\cup\cdots\cup\gamma_{p+1})$ 上,每个分支 φ_1 和 φ_2 都是单值函数. 事实上,在我们的截口系统下,不允许有绕过奇数个歧点的环路,仅可能有绕过偶数个歧点的环路. 于是,在环绕任何环路时,得到根式前面的符号变化为偶数次.

注意,每个截口的边标以符号"+"和"-",这时叶 Γ_1 和叶 Γ_2 中的每一个都同胚于 $S^2\setminus(\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_{n+1})$.

于是,为了获得 Γ,应该粘合这两叶,在粘贴截口的边时,要考虑它的符号(图 4.85). 这样就得到带有

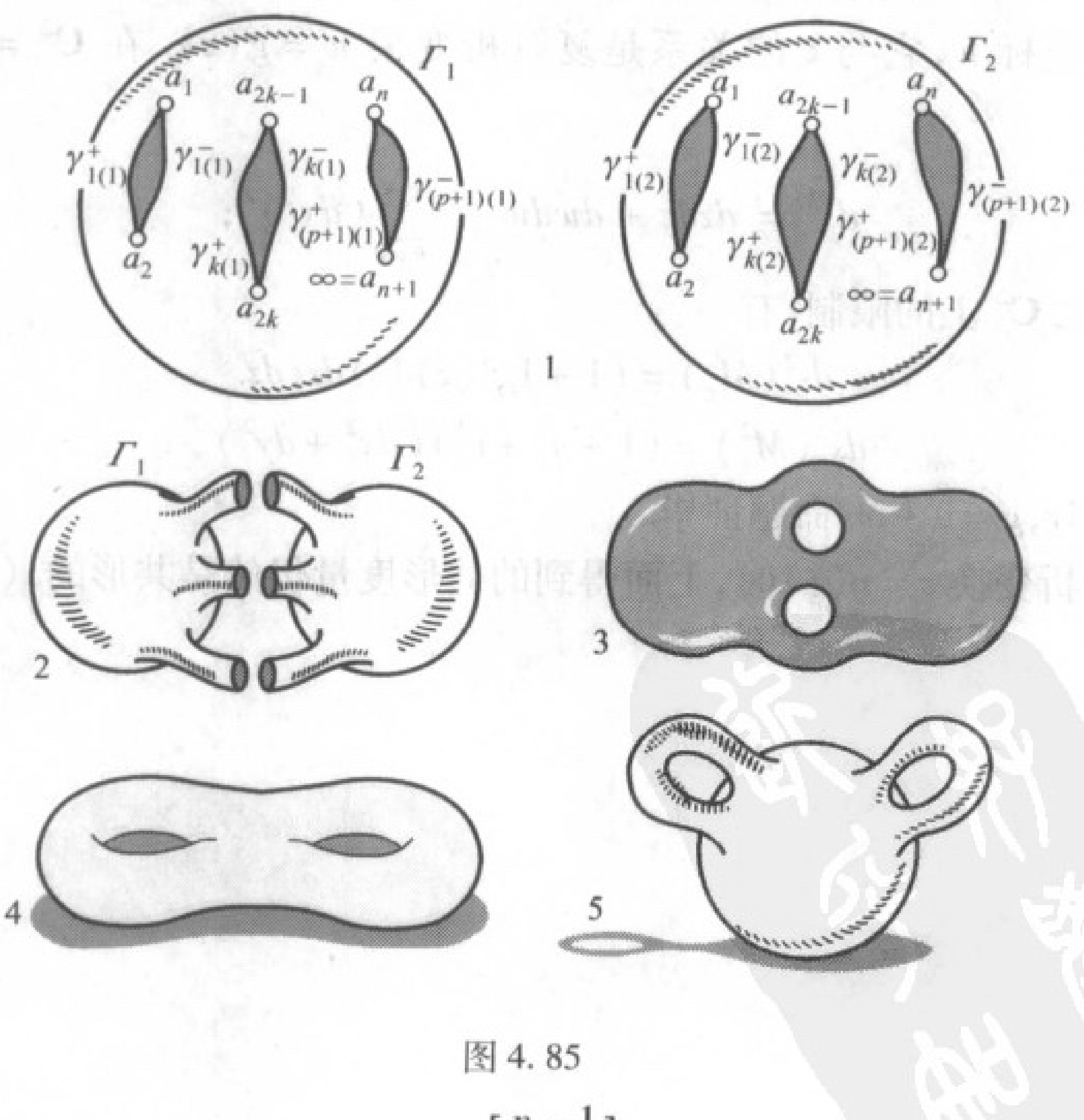


图 4.85

$$p=\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

个柄的球面 S^2.

设 $n=2p$;根据命题2,所有的根 $a_1,\cdots,a_{2p}$ 为歧点,并且仅有这些歧点. 因此,重复前面的论证即可. 定理证毕.

命题3 每一个 g 型(即球带柄)的二维光滑紧致连通可定向闭流形是复解析流形.

证明 对函数 $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$,P_n 没有重根,考察 Γ,因为 $\Gamma\subset\mathbf{C}^2$,这里 Γ 由图像 $w=g(z)$ 或图像 $z=\omega(w)$ 给出,所以有两个垂直射影:$(z,w)\to\mathbf{C}^1(z)$;和 $(z,w)\to\mathbf{C}^1(w)$. 在每一点 $(z,w)\in\Gamma$,至少有一个射影是确定的,因为 $\mathrm{grad}(w^2-P_n(z))\neq 0$(参看定理1). 得到用局部圆盘覆盖 Γ. 变换函数或者是 $w=g(z)$,或者是 $z=\omega(w)$. 因为函数 $g(z)$ 或 $\omega(w)$ 是复解析函数(参看命题1),所以得到所要的论断. 命题证毕.

不可定向的二维流形不是复解析流形.

命题4 每一个 g 型(即 M_g^2)二维光滑紧致连通可定向闭流形可以附以共形黎曼度量.

证明 如果存在局部坐标,使得在此坐标下,度量有形式 $g_{ij}=\alpha\delta_{ij}$ 时,则称此度量为共形的. 将 M_g^2 在(扩大的)$\mathbf{C}^2$ 中实现为函数 $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$ 的黎曼曲面. 在 M_g^2 上考察坐标 z. 这个复坐标可作为除点0以外的整个 M_g^2 的坐标,在点0的邻域中必须引进坐标 w,它与 z 的关系是复解析变换 $w=g(z)$. 在 $\mathbf{C}^2=\mathbf{R}^4$ 中,引入度量:

$$ds^2=dzd\bar{z}+dwd\bar{w}=\sum_{k=1}^{4}(dx^k)^2;$$

考察它在 $\Gamma\subset\mathbf{C}^2$ 上的限制,有

$$ds^2(M_g^2)=(1+|g'(z)|^2)dz,d\bar{z}.$$

或:

$$ds^2(M_g^2)=(1+u_x^2+v_x^2)(dx^2+dy^2),$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$,$g=u+\mathrm{i}v$. 命题证毕.

在复解析变换 $z=\eta(\xi)$ 时,上面得到的共形度量仍然是共形的.(验证!)

第五章　张量分析与黎曼几何

5.1　流形上张量场的一般概念

我们考察光滑流形 M^n；设 $P \in M^n, x^1, \cdots, x^n$ 是 P 点的某个邻域中的正则坐标. 我们研究关于坐标变换不变的对象. 用符号"撇"表示新的坐标 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$.

（1）设 $\boldsymbol{a} \in T_P(M^n)$ 是 M^n 切向量. 我们来找出在不同坐标系计算的向量坐标间的关系. 因为

$$\boldsymbol{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = a^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}},$$

并且因为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}$ 构成 $T_P(M^n)$ 的基，所以 $a^{i'} = a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. 我们看到向量的分量 $a^1, \cdots, a^n$ 借助于 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) = J$ 来变换. 这是在坐标变换时，作为几何对象的向量，由不变性而得到的条件.

现在，可以把向量确定为对象，它在每一个坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 中由一数组 $a^1, \cdots, a^n$ 给出，并要求当坐标从 $x^1, \cdots, x^n$ 变为坐标 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$ 时，按照规则 $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i$ 变换. 显然，这样定义的对象是不变的.

（2）设 $f(x)$ 是 M^n 上的光滑函数；我们来考察 $\mathrm{grad}\, f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$，找出这个数组变换的规律. 我们有：

$$\xi_{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

其中

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)=(J^{\mathrm{T}})^{-1},$$

也就是说，这一组$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与向量的分量比较起来是按另外的规则变换；亦即借助于矩阵$((J^{-1})^{\mathrm{T}})$来变换. 这个规律是从函数f关于向量$\boldsymbol{a}$的方向导数的不变性(关于坐标变换)得到. 实际上，

$$\frac{df}{d\boldsymbol{a}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\gamma(\varepsilon))-f(\gamma(0))}{\varepsilon},$$

其中$\gamma(t)\in M^n$；$\gamma(0)=P,\dot{\gamma}(0)=\boldsymbol{a}\in T_P(M^n)$；

$$\frac{df}{d\boldsymbol{a}}=a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=a^{i'}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}};$$

由此得到

$$a^{i'}\xi_{i'}=a^i\xi_i,$$

$$\xi_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\xi_i,$$

这就是所要求的结果.

(3) 考察$T_P(M^n)$和与它成共轭的空间$T_P^*(M^n)$，$T_P^*(M^n)$是实线性泛函$l(\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{a}\in T_P(M^n)$所构成的空间. 在坐标变换时，泛函$l(\boldsymbol{a})$的分量如何变化？在$T_P^*(M^n)$上引入基$e^1,\cdots,e^n$，它们由泛函$e^k(\boldsymbol{e}_\alpha)=\delta_\alpha^k$组成，其中，$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是$T_P(M^n)$中的基. 因为$l(\boldsymbol{a})$是实数，并且不依赖于坐标的选择，所以有$l(\boldsymbol{a})=l'(\boldsymbol{a}')$；由此得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a^i\boldsymbol{e}_i;l(\boldsymbol{a})=l_ka^k=l_{k'}a^{k'}\\&=l_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}a^k.\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{a}$的任意性，得到$l_{k'}=\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}l_k$，所以，泛函$l$的坐标变换规则与$\operatorname{grad} f$的坐标变换规则一致. $T_P^*(M^n)$的元素称为共变向量，于是，$\operatorname{grad} f$是共变向量.

我们在T^*中取由共变向量$e^1,\cdots,e^n$组成的共轭基，我们使T和T^*等同起来：设

$$\varphi:T\to T^*,\varphi(\boldsymbol{a})=l,\text{其中 }\boldsymbol{a}=a^k\boldsymbol{e}_k,l=\sum_{k=1}^n a^ke^k,$$

即在同构φ下，与$\boldsymbol{a}$相对应的l，关于$e^1,\cdots,e^n$与向量$\boldsymbol{a}$关于$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$有相同的坐标. 这个同构在坐标变换$(x)\to(x')$时不是不变的，因为向量的分量按矩阵$J$变换，而共变向量按矩阵$(J^{-1})^{\mathrm{T}}$变换. 其实存在这样的变换，在此变换下仍保持对应关系$\varphi:T\to T^*$：这就是使$J=(J^{-1})^{\mathrm{T}}$的变换，即在给定的点P，所给变换的 Jacobi 矩阵是正交矩阵.

(4) 设C是使$T_P(M^n)$变为自身的齐次线性算子；设C是在基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$下写

出的算子的矩阵. 作变换$(x)\to(x')$，得到$C'=JCJ^{-1}$，即$c_{j'}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}c_{j}^{i}$. 算子矩阵的变换规则可以从变换使关系式$\boldsymbol{b}=C(\boldsymbol{a})$关于坐标变换是不变的要求得到.

(5) 我们考察$T_P(M^n)$上的双线性对称形式B;$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=b_{ij}a^ib^j$. 由代数知道，在坐标变换时，形式$B$的矩阵变为矩阵$B'$，使$B'=JBJ^{\mathrm{T}}$，即$b_{i'j'}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}b_{ij}$. 和上述一样，$B$的这个变换规则可以从要求数量$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P$，在坐标变换时保持不变而得到. 事实上

$$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=b_{ij}a^ib^j\equiv b_{i'j'}a^{i'}b^{j'}=b_{i'j'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}a^ib^j,$$

即

$$b_{i'j'}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}b_{ij}.$$

我们引用变换规律的简单的例子，并指出指标在对象分量上的不同位置时变换的规则是不同的：a^i,l_j,C_j^i,b_{ij}，上面的指标称为**逆变指标**，下面的指标称为**共变指标**. 用数对(p,q)给出相类似对象的类型是方便的，其中，q是共变指标数，p是逆变指标数. 向量的坐标组是$(1,0)$型，共变向量是$(0,1)$型，算子是$(1,1)$型，向量的双线性形式是$(0,2)$型. 除这种形式外，还存在着在共变向量$l,m\in T_P^*(M^n)$上的形式$B(l,m)$. 计算(与$B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$类似)给出$B'=(J^{-1})^{\mathrm{T}}B(J^{-1})$. 于是，若在每个坐标系中给出了一组数(函数)，从一个坐标系到另一坐标系中按指定的规则变换，则这组数定义了某个不变对象，并且在不同的坐标系中我们可借助于坐标表示来研究它. 这种情况作为在流形上张量场的一般定义的基础，即不变的几何对象与坐标系的选择无关. 其分量的具体表示依赖于坐标系.

定义 1 在每一个坐标系$(x)=(x^1,\cdots,x^n)$中用函数组$T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}(x)$给出的对象，在坐标系变换$(x)\to(x')$时，按规则

$$T_{j_1',\cdots,j_q'}^{i_1',\cdots,i_p'}=\frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}}\cdot\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}T_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p}$$

变换，就称此对象是秩为$p+q$的(p,q)型张量场.

我们引入的对象，关于坐标变换是不变的. 事实上，由代数教程知道，张量(张量场)可以定义为多重线性映射

$$T:\underbrace{T_P\times\cdots\times T_P}_{q}\times\underbrace{T_P^*\times\cdots\times T_P^*}_{p}\to\mathbf{R},$$

此映射由形式

$$T(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_q;l_1,\cdots,l_p)=T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}a_1^{j_1}\cdots a_q^{j_q}l_{i_1}^1\cdots l_{i_p}^p$$

给出，其中$\boldsymbol{a}_k=a_k^{j_k}\boldsymbol{e}_{j_k}$，$l^k=l_{i_k}^k e^{i_k}$. 函数$T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$是映射$T$的系数. 若取定基$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$和

$e^1,\cdots,e^n$，则关于 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 有有效的公式

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=T(e_{j_1},\cdots,e_{j_q};e^{i_1},\cdots,e^{i_q}).$$

事实上，

$$\begin{aligned}T(e_{j_1},\cdots,e_{j_q};e^{i_1},\cdots,e^{i_p})&=T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\rho_1\cdots\rho_q}(e_{j_1})^{\rho_1}\cdot\cdots\cdot(e_{j_q})^{\rho_q}(e^{i_1})_{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot(e^{i_p})_{\alpha_p}\\&=T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\rho_1\cdots\rho_q}\delta^{\rho_1}_{j_1}\cdots\delta^{\rho_q}_{j_q}\cdot\delta^{i_1}_{\alpha_1}\cdots\delta^{i_p}_{\alpha_p}\\&=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}.\end{aligned}$$

由公式

$$T:(T_P)^q\otimes(T_P^*)^p\to\mathbf{R}$$

表示的所有对象同样有多重线性的性质，并且是不变的. 系数 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 的具体表示依赖于坐标的选择.

我们将常常用坐标表示来进行工作，因为它在具体计算时是有用的. 为方便起见，我们引用所谓多重指标 $(i)=(i_1,\cdots,i_p)$，它用一个指标 (i) 代替整个一行的指标. 例如，张量的规则写成

$$T^{(i')}_{(j')}=\frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}}\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}}T^{(i)}_{(j)},$$

其中

$$\frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}}=\frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{i_2'}}{\partial x^{i_2}}\cdots\frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}}.$$

我们来研究张量场的最简单的性质.

引理 1 若 $(x)\to(x')$ 是正则变换，则张量规则

$$T^{(i')}_{(j')}=\frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}}\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}}T^{(i)}_{(j)}$$

是可逆的，即

$$T^{(i)}_{(j)}=\frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}}\frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}}T^{(i')}_{(j')}.$$

证明 由恒等式 $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$ 即可得到. 引理证毕.

引理 2 设在坐标系 (x) 中写出张量场，并施行坐标变换 $(x)\to(z)\to(y)$ 和 $(x)\to(v)\to(y)$. 则张量场 T 在坐标系 (y) 中的表示与从 (x) 变到 (y) 的方法无关.

证明 引理的证明可由复合函数的微分公式

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k}=\frac{\partial y^i}{\partial z^q}\frac{\partial z^q}{\partial x^k}=\frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k}$$

得到.

由代数教程中已知张量的一些性质，我们在这里提醒一下：

(a) 秩为 $p+q$ 的 (p,q) 型张量（在一点来考察张量）构成线性空间 H，而且 $\dim H=n^{(p+q)}$. 其证明可由张量作为多重线性映射的表示法，即多重线性映射的线

性组合仍是多重线性的得到.

(b) 在秩为 $p+q$ 的所有的 (p,q) 型张量线性空间 H 中,具有多重线性映射

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}$$

组成的可加基. 基中元素的个数等于 n^{p+q}. 每一个映射

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}$$

由公式

$$e_{i_\alpha}(l)=l_{i_\alpha}, l\in T_P^*(M^n); e^{j_\alpha}(a)=a^{j_\alpha}, a\in T_P(M^n);$$

$$(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q})(a_1,\cdots,a_q;l^1,\cdots,l^p)$$

$$=e_{i_1}(l^1)\cdot\cdots\cdot e_{i_p}(l^p)\cdot e^{j_1}(a_1)\cdot\cdots\cdot e^{j_q}(a_q)$$

$$=l_{i_1}^1\cdot\cdots\cdot l_{i_p}^p\cdot a_1^{j_1}\cdot\cdots\cdot a_q^{j_q}$$

给出.

若 $T:(T_PM^n)^q\times(T_P^*M^n)^p\to\mathbf{R}$ 是任意秩为 (p,q) 的多重线性映射,则

$$T(a_1,\cdots,a_q;l^1,\cdots,l^p)=T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}a_1^{j_1}\cdots a_q^{j_q}l_{i_1}^1\cdots l_{i_p}^p,$$

即

$$T=T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}).$$

利用多重指标,任何张量 T 按张量基的分解表示为 $T=T_{(j)}^{(i)}e_{(i)}\otimes e^{(j)}$.

注意,基张量 $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}$ 在坐标变换下的变换规则为

$$e_{(i')}\otimes e^{(j')}=\frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}}\frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}},e_{(i)}\otimes e^{(j)}$$

所有这些性质和定义都可从一点的向量移到流形上的光滑张量场去;应该把张量场看作为 (p,q) 型基场的变系数的线性组合,从而把张量场的空间变为无限维的空间.

5.2 张量场的简单例子

5.2.1 例

(1) 流形上的光滑向量场是(1,0)型的张量场;所有光滑向量场的空间是无限维的.

(2) M^n 上光滑的共变向量场,即在每一点 $x\in M^n$ 由线性函数 $l(x)\in T_x^*(M^n)$ 给出,并且光滑地依赖于点 x. 在这个无限维(0,1)型张量场空间中,包含了无限维位势场 grad $f(x)$ 的子空间.

(3) 设在 M^n 上给出黎曼度量 $g_{ij}(x)$. 因为 $g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}$,所以一组 $g_{ij}(x)$ 定义了(0,2)型的张量场,这个张量称为**度量张量**.

(4) 复解析流形 M^{2n} 上每一 $T_x(M^{2n})$,定义了算子 I(乘以虚单位数),$I^2=-E$. 这个算子光滑地依赖于点,我们得到(1,1)型的张量场.

(5) **惯性矩张量**　在 $\mathbf{R}^3$ 中考虑带有一个固定点 O 的刚体;刚体绕点 O 旋转. 我们将认为它由 N(有限数)个质点组成,质点间是刚性固定的. 设质点为 m_1, $m_2,\cdots,m_N$,它们的坐标为 $x^i_{(1)},\cdots,x^i_{(N)}\ (i=1,2,3)$. 作矩阵

$$a^{ij}=-\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha x^i_{(\alpha)}x^j_{(\alpha)}+\delta^{ij}\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha|\boldsymbol{x}_{(\alpha)}|^2.$$

这个秩为 2 的(0,2)型张量,而且矩阵(a^{ij})是对称的,称为刚体的惯性矩张量. 我们来说明这个张量的作用. 设过 O 点作一带有单位方向向量 $\boldsymbol{l}=(l^1,l^2,l^3)$ 的直线,求出和 $\sum\limits_{ij}a^{ij}l^il^j=H(\boldsymbol{l})$. 经计算,得

$$H(\boldsymbol{l})=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha(|\boldsymbol{x}_{(\alpha)}|^2-\langle\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{l}\rangle^2).$$

因子 $|\boldsymbol{x}_{(\alpha)}|^2-\langle\boldsymbol{x}_{(\alpha)},\boldsymbol{l}\rangle^2$ 是从具有质量 m_α 的点到轴 $\boldsymbol{l}$ 的距离的平方. 我们得到了物体关于轴的惯性矩的众所周知的表示式. 矩阵(a^{ij})的特征向量给出了刚体惯性主轴的方向.

(6) **形变张量**　我们考察填满 $\mathbf{R}^n$ 中某个体积的连续介质,在 $\mathbf{R}^n$ 上建立笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$. 我们考察在某种力的作用下介质的小形变. 介质点的位移由依赖于点的光滑函数 $u^i(x^1,\cdots,x^n)$ 给出. 位移后,点 $\tilde{P}$ 的坐标用原来点的坐标表示:$\tilde{x}^i=x^i+u^i(x^1,\cdots,x^n)$. 设位移很小,即函数 $u^i(x)$ 足够地小. 在介质形变时光滑曲线长度如何变化? 考虑两个邻近点 $P(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $P'(x^{1'},\cdots,x^{n'})$;设 $(\Delta l)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x^{i'}-x^i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2$ 是连接点 P 和 P' 的线段的欧氏长度的平方;求出 $(\Delta l')^2$,这是连接 $\tilde{P}$ 和 $\tilde{P}'$ 的线段的长度的平方. $\tilde{P}$ 和 $\tilde{P}'$ 是 P 和 P' 在介质形变位移后的点(图 5.1). 我们有

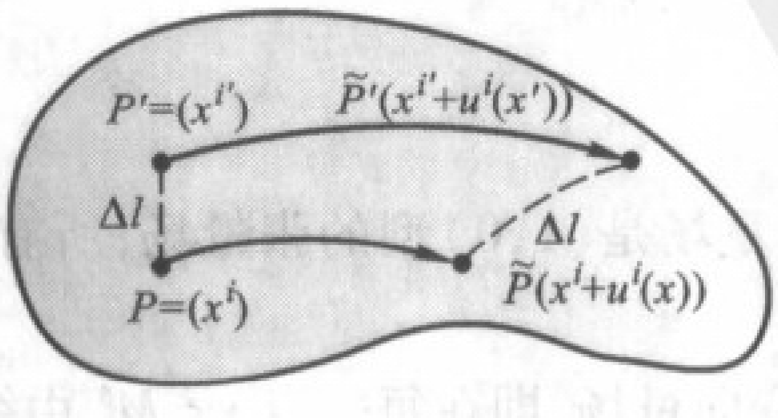


图 5.1

$$(\Delta l')^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^{i'} + u^i(x') - x^i - u^i(x))^2$$
$$= (\Delta l)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n}(\Delta u^i)^2.$$

因为 $\Delta u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^k$,所以

$$(\Delta l')^2 - (\Delta l)^2 = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)\Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,k,p}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\ \frac{\partial u^i}{\partial x^p}\Delta x^k \Delta x^p.$$

于是

$$(dl')^2 - (dl)^2 = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i dx^k + \sum_{i,k,p}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\ \frac{\partial u^i}{\partial x^p}\Delta x^k \Delta x^p.$$

如果形变 $u^i(x)$ 很小,那么可以认为

$$(dl')^2 - (dl)^2 \cong \sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)\Delta x^i \Delta x^k.$$

假设 $\eta_{ik}(x) = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}$,那么 $(dl')^2 - (dl)^2 \cong \eta_{ik}dx^i dx^k$. 函数组 η_{ik} 构成秩为2的(0,2)型张量,称为小形变张量.

(7) **应力张量** 考虑形变的弹性体. 在弹性体中出现了"应力". 设 $d\sigma$ 是小的平面片的面积,此小面积位于弹性体中且有定向,并且通过点 P;$\boldsymbol{n}(P)$ 是 $d\sigma$ 在点 P 的法线(图5.2);在平面片附近,平面片把弹性体分为两部分:一部分位于平面片的正侧,另一部分位于平面片的负侧. 可以认为,弹性体的第一部分以力 $\boldsymbol{F}$ 通过平面片 $d\sigma$ 作用于第二部分,力 $\boldsymbol{F}$ 作用于点 P,并且与平面片的面积成比例. 它的面积也用 $d\sigma$ 表示. 于是,在点 P 的每一个法线 $\dot{\boldsymbol{n}}(P)$ 与向量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ 相对应,即 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$. 这种依赖的性质在弹性理论中根据实验建立起来. 可以认为关系 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ 是线性的,即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = Q_P(\boldsymbol{n})d\sigma$,其中 $F^i = Q^i_j n^j d\sigma$;$\{n^j\}$ 是 $\boldsymbol{n}(P)$ 的坐标. 产生了(1,1)型的张量场. 这个场就是应力张量.

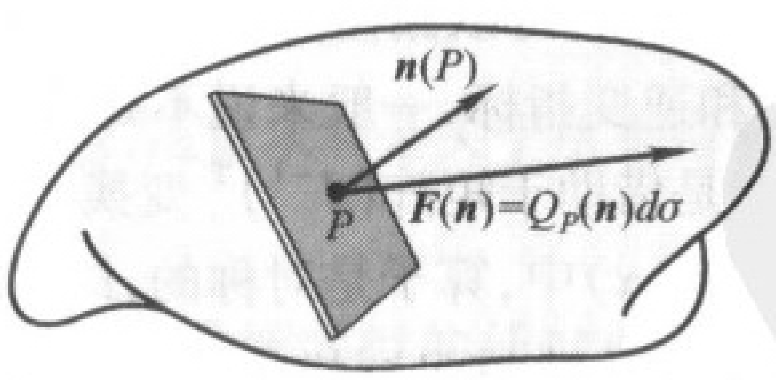


图5.2

由力学的设想得到:应力张量 Q_P 是对称的. 应力张量不仅可以在变形的弹性体中定义,也存在于理想流体中. 在理想流体中,没有内摩擦力,因此作用在 $d\sigma$ 上的应力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ 按法线指向 $d\sigma$. 所以算子 Q_P 是对角形的,即

$$Q^i_j = q(P)\delta^i_j,$$

$$F^i = q(P) n^i(P) d\sigma,$$

其中 $q(P)$ 是点 P 的数值函数，称为压力. 它不依赖于方向 $\boldsymbol{n}$，而仅决定于点 P 本身. 如果对介质，$Q_P = q(P) \cdot E$ 成立，那就是说它满足 Pascal 定律. Pascal 定律不总是都满足的；例如，在粘性流体中，应力张量就可能有比较复杂的形式.

在形变张量和应力张量之间存在着关系；在一阶近似下，当形变很小时，可以认为应力张量线性地依赖于形变张量，即 $Q_j^i = \alpha_j^{ikl} \eta_{kl}$，其中，函数 α_j^{ikl} 组成秩为 4 的张量（(3,1) 型的）. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，张量 α_j^{ikl} 有 81 个分量. 上述所说的线性关系称为 Hooke 定律. 我们假设，介质是均匀的和各向同性的，即关系式 $Q = Q(\eta)$；正交变换下是不变的，也就是张量 α_j^{ikl} 关于 $SO(3)$ 是不变的. 可以证明，此时，$Q_j^i = Q_{ij} = \mu\eta_{ij} + \lambda \mathrm{tr}(\eta) \cdot \delta_{ij}$，其中 λ, μ 称为 Lame 系数. 函数 $\sum \eta_{ii} = \mathrm{tr}(\eta)$ 有简单的意义（我们对上、下指标不加区别，因为事情是在 $\mathbf{R}^3$ 中进行的）. 我们考察在小形变作用下介质点的转移，这时函数 u^i 是形变给出的向量场的分量；用 $\boldsymbol{v}(P)$ 来表示这个场. 那么，$\mathrm{tr}(\eta) = \sum_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^i}\right) = 2\sum_i \eta_{ii} = \mathrm{tr}(\eta) \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 2\mathrm{div}(\boldsymbol{v})$，即 $\mathrm{tr}(\eta)$ 是转移的散度场. 系数 μ，对流体来说就是所说的粘性系数.

5.2.2 张量的代数运算

（1）给出两个同秩同型的张量场 $T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ 和 $P_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$，则可以得到一个新的张量场（验证！）：

$$C_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} = T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} + P_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}.$$

（2）若 $T_{j_1\cdots j_p}^{i_1\cdots i_p}$ 是 M^n 上的张量场，$f(x)$ 是 M^n 上的光滑函数，则 $f(x) T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ 也是张量场. 证明是容易的.

（3）**同型指标的交换** 例如，张量场 $T_{i_1\cdots i_q}$；按公式 $P_{i_1\cdots i_s\cdots i_\alpha\cdots i_q} = T_{i_1\cdots i_\alpha\cdots i_s\cdots i_q}$ 作出新的场；即运算就是交换张量的分量. 这个运算是张量的运算（验证！）. 这里，调换了两个指标 i_s 和 i_α 的位置. 显然，可以做任何指标的交换.

注意 交换共变指标和逆变指标，一般来说不是张量运算，因为上指标是借助于矩阵 J 变换的，而下指标是借助于矩阵 $(J^{-1})^{\mathrm{T}}$ 变换的. 例如：考察 (1,1) 型的场，即算子 C；假设在某个坐标系 (x) 中，算子是对称的，即 $c_j^i = c_i^j$. 换句话说，有 $C = C^{\mathrm{T}}$. 我们假定在任何另外的坐标系中也满足同样的关系：$(C') = (C')^{\mathrm{T}}$. 设 A 是变换的 Jacobi 矩阵，那么 $C' = ACA^{-1}$，$ACA^{-1} = (ACA^{-1})^{\mathrm{T}}$；即 $BC = CB$，这里 $B = A^{\mathrm{T}}A$. 显然，矩阵 B 和 C 不总是可交换的. 如果 Jacobi 矩阵是正交矩阵，那么交换指标 i 和 j 的位置是张量运算.

（4）**缩并运算** 设 $T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ 是张量场；标出两个不同型的指标——共变指标 j_s 和逆变指标 i_α；作函数：$P_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}^{i_1\cdots i_{\alpha-1}i_{\alpha+1}\cdots i_p} = \sum_i T_{j_1\cdots j_{s-1}j_s=i\,j_{s+1}\cdots j_q}^{i_1\cdots i_{\alpha-1}i_\alpha=i\,i_{\alpha+1}\cdots i_p}$. 这个运算是张量运算（验

证!),并且把(p,q)型张量变为$(p-1,q-1)$型张量. 如果$p=q$,则对原来的张量场$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$可以定义全缩并,即把所有的上指标与所有的下指标缩并;得到数量函数$\mathrm{tr}(T)$,这是不变场T,即在坐标变换下它是不变的.

(5) **张量的乘积** 从两个张量场$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$和$P^{\alpha_1\cdots\alpha_s}_{\beta_1\cdots\beta_t}$,构造新的张量场$C^{i_1\cdots i_p\alpha_1\cdots\alpha_s}_{j_1\cdots j_q\beta_1\cdots\beta_t}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\cdot P^{\alpha_1\cdots\alpha_s}_{\beta_1\cdots\beta_t}$. 显然,这是$(p+s,q+t)$型张量场;表示为$C=T\otimes P$,一般地说,张量乘法的运算是不可交换的.

(6) **指标的上升和下降** 例如,我们考察$(0,2)$型的非退化张量场a_{ij},即矩阵$A=(a_{ij})$是非退化的;于是存在逆矩阵A^{-1},它的元素由a^{ij}构成. 由此$a^{ik}a_{kj}=\delta^i_j$. 对任意的张量场$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$;可以作出张量场$P^{i_2\cdots i_p}_{\alpha j_1\cdots j_q}=a_{\alpha i_1}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. 类似地,也可作出向量场$C^{\alpha i_1\cdots i_p}_{j_2\cdots j_q}=a^{\alpha j_1}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. 第一个运算称为指标的下降运算,第二个运算称为指标的上升运算. 这些运算都是张量运算,因为这些运算是两种张量运算的合成:张量的相乘和缩并. 由于张量场a^{ij}的非退化性,指标的上升和下降的运算互为逆运算;事实上,$a_{j_1\alpha}C^{\alpha i_1\cdots i_p}_{j_2\cdots j_q}=a_{j_1\alpha}a^{\alpha s}T^{i_1\cdots i_p}_{sj_2\cdots j_q}=\delta^s_{j_1}T^{i_1\cdots i_p}_{sj_2\cdots j_q}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. 通常,取度量张量$g_{ij}$作为$a_{ij}$. 若$M^n=\mathbf{R}^n$,$g_{ij}=\delta_{ij}$,在笛卡儿坐标系中,上指标和下指标是没有区别的. 可把所有的指标都看作下指标. 在一般情况下,指标的上升和下降的运算使得$T_P(M^n)$和$T^*_P(M^n)$能够用典型的方法一致起来. 事实上,向量是$T_P(M^n)$的元素,而共变向量是$T^*_P(M^n)$的元素. 作线性映射

$$A:T\to T^*,A(\boldsymbol{a})=\xi,$$

$$\xi_i=g_{i\alpha}a^\alpha;$$

$$B:T^*\to T,B(\eta)=\boldsymbol{b},b^i=g^{i\alpha}\eta_\alpha;$$

显然

$$B\circ A:T\to T,B\circ A=I_T$$

(恒等映射). 类似地,$A\circ B:T^*\to T^*;AB=I_{T^*}$,这就是说,$A$和$B$是同构. T和T^*的这样的等同关于坐标变换是不变的,因为运用的运算是张量运算.

(7) **对称** 我们考察张量场T的所有同型指标(例如下指标). 定义运算:$P_{j_1\cdots j_q}=T_{(j_1\cdots j_q)}=\frac{1}{q!}\sum_{(\sigma)}T_{\sigma(j_1\cdots j_q)}$,这里求和是关于所有指标$j_1,\cdots,j_q$的置换,对称的运算是张量运算(验证!).

定义1 张量场$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$,如果交换同型的任何两个指标时,它是不变的,则称$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$**是对称的张量场**.

显然,对称场的对称仍是它本身.

(8) **交错** 考察一个场T的所有同型指标(例如,下指标). 定义交错为

$$P_{j_1\cdots j_q}=T_{[j_1\cdots j_q]}=\frac{1}{q!}\sum_{(\sigma)}(-1)^{\varphi(\sigma)}T_{\sigma(j_1\cdots j_q)},$$

其中$\varphi(\sigma)$是置换σ的奇偶性(有时写为$(-1)^\sigma$). 交错运算是张量运算(验证!).

定义 2　张量场 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$,如果它的分量在同型的任何两个相邻的指标对换(置换)时改变符号,则称此张量场是**反对称的张量场**.

引理 1　交错运算不改变反对称张量;交错运算化对称张量为 0.

此引理的证明可由对称张量和反对称张量的定义得到.

对称和反对称算子具有不变意义的概念仅在存在黎曼度量时才有意义(更一般地,存在非退化的(0,2)型或(2,0)型张量场时才有意义).黎曼度量 g_{ij} 在每一个 $T_P(M^n)$ 中产生数量积

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle_P=g_{ij}(P)a^ib^j.$$

定义 3　算子 T 或(1,1)型的算子场,若对任意的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(M^n)$ 满足恒等式 $\langle T\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a},T\boldsymbol{b}\rangle$,则称 T 为**对称的**.相应地,若满足 $\langle T\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\langle \boldsymbol{a},T\boldsymbol{b}\rangle,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(M^n)$ 时,称 T 为**反对称的**.

例如,对于对称算子,有 $\langle \boldsymbol{a},T\boldsymbol{b}\rangle=(g_{ij}T^j_k)a^ib^k=T_{ik}a^ib^k$,其中 $T_{ik}=g_{ij}T^j_k$.类似地,$\langle T\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=T_{ki}a^ib^k$,这里 $T_{ki}=g_{jk}T^j_i$.因为 $T_{ik}a^ib^k\equiv T_{ki}a^ib^k$,所以 $T_{ik}=T_{ki}$.于是,(1,1)型张量 T 的指标下降后,对称的条件具有熟悉的形式,即 T_{ik} 在对换指标时是不变的.类似地,也可考察反对称的情况.

5.2.3　反对称张量

我们考察共变的反对称张量 $T_{i_1\cdots i_k}$.

引理 2　在 M^n 上最大秩为 n 的反变张量 $T_{i_1\cdots i_n}$ 仅由它自己的一个分量 $T_{12\cdots n}$(实质的分量)完全确定;其他的分量与它仅差一个因子 $(-1)^\sigma$,即

$$T_{i_1\cdots i_n}=(-1)^\sigma T_{12\cdots n},(i_1,\cdots,i_n)=\sigma(1,2,\cdots,n).$$

证明　在开始的坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 中 $T_{i_1\cdots i_n}=(-1)^\sigma T_{12\cdots n}$(参看反对称的定义).设作变换:$(x)\to(x')$,则有

$$\begin{aligned}T_{1'\cdots n'}&=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}}T_{i_1\cdots i_n}=\Big(\sum_\sigma(-1)^\sigma\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}}\Big)T_{12\cdots n}\\&=(\det J)\cdot T_{12\cdots n}.\end{aligned}$$

引理证毕.

对反对称张量定义重要的运算:**外乘**.设 $T_{i_1\cdots i_k}$ 和 $P_{j_1\cdots j_q}$ 是两个反对称张量;我们确定新的反对称张量 $R=T\wedge P$ 来表示,这里

$$\begin{aligned}R_{i_1\cdots i_kj_1\cdots j_q}&=T_{[i_1\cdots i_k]}P_{[j_1\cdots j_q]}\\&=\frac{1}{k!\ q!}\Big(\sum_\sigma(-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\cdots i_k}P_{j_1\cdots j_q)}\Big).\end{aligned}\tag{1}$$

这个乘法是双线性运算;它的秩是两张量秩的和.我们研究用外微分形式的语言来解释.首先,考察给定在 M^n 中一点的反对称张量 $T_{i_1\cdots i_k}$.把坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 看作点 P 的邻域中的函数.对任何光滑函数 $f(x)$,它的微分 df 是 T_* 的共轭空间的元素,即

T_* 上的线性泛函. 事实上, 若 $\boldsymbol{a}\in T_*$, 则

$$\frac{df}{d\boldsymbol{a}}=\left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0},$$

这里 $\gamma(0)=P$; $\dot{\gamma}(0)=\boldsymbol{a}$, 即

$$\frac{df}{d\boldsymbol{a}}=\frac{\partial f}{\partial x^k}a^k.$$

如果 $f=x^i$, 那么 $\frac{dx^i}{d\boldsymbol{a}}=a^i$ 和 $dx^k=a^k dt$.

于是, dx^k 是 T_* 上的泛函, 即为 T^* 的元素. 这里 dt 可看作比例系数并把它略去. 如果 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\in T_*$, 是 T_* 的基, 那么在 $dx^k(\boldsymbol{e}_\alpha)=\delta^k_\alpha$ 时, 取 $dx^1,\cdots,dx^n$ 作为 T^* 的基, 即 $dx^k(\boldsymbol{a})=a^k$. 我们定义由 $dx^1,\cdots,dx^n$ 构成的外代数 $\Lambda(dx^1,\cdots,dx^n)$, 其中关系式 $dx^i\wedge dx^j+dx^j\wedge dx^i=0(i\neq j)$ 成立; 运算 $\wedge$ 是双线性的, 代数 Λ(在加法的意义下)由单项式: $dx^1,\cdots,dx^n$; $dx^i\wedge dx^j, i<j$; $\cdots$; $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}, i_1<\cdots<i_k$; $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 产生. 由代数教程中知道, 在这些单项式之间没有常系数线性关系; $dx^1,\cdots,dx^k$ 是乘法生成元. 代数 Λ 分解为线性子空间 Λ^k 的直和: $\Lambda=\bigoplus\limits_{k=0}^{n}\Lambda^k$, 其中 $\Lambda^k, 1\leqslant k\leqslant n$, 由单项式 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(i_1<\cdots<i_k)$ 生成; $\Lambda^0\cong\mathbf{R}$, 它由单位 1 产生. 代数 Λ 的维数等于 2^n.

我们考察新的代数 $\Lambda(M^n)$, 它的元素线性组合 $\omega^{(k)}=T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 和所有可能的线性组合 $\sum\limits_{k=0}^{n}\omega^{(k)}$, 其中 $T_{i_1\cdots i_k}(x)$ 是秩为 k 的反对称张量场, 并且指标 $i_1\cdots i_k$ 调整为增长的序列. $\Lambda(M^n)$ 中的乘法在下面定义.

在坐标变换 $(x)\to(x')$ 时, $\omega^{(k)}$ 将如何?

引理 3 元素 $\omega^{(k)}=T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 定义了不变量, 就是说, 在坐标变换 $(x)\to(x')$ 时, 有

$$T_{i'_1\cdots i'_k}dx^{i'_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i'_k}\equiv T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

证明 只要实行变换 $(x)\to(x')$ 并利用 $T_{i_1\cdots i_k}(x)$ 和 dx^i 的变换规则即可. 引理证毕.

代数 $\Lambda(M^n)$ 的元素 $\omega^{(k)}$ 称为**外微分形式**.

$\Lambda(M^n)$ 的维数是无限的. 每一个外形式 $\omega^{(k)}$ 确定了反对称张量的分量 $T_{i_1\cdots i_k}$; 反之也对: 任何反对称张量唯一地确定了外形式.

注 在定义外形式时, 可以考察线性组合形式 $A_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$, 这里, $A_{i_1\cdots i_k}$ 是任意张量场(不一定是反对称的), 并且关于所有无次序的指标组 $i_1\cdots i_k$ 进行求和. 但由于外乘的反对称性, 我们有

$$A_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}=A_{[i_1\cdots i_k]}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},$$
$$i_1<\cdots<i_k;$$

即任何组合 $A_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$产生某个外微分形式.

我们给出 $\Lambda(M^n)$ 中的乘法. 若 $\omega^{(k)}=T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(i_1<\cdots<i_k)$ 和 $\omega^{(s)}=P_{j_1\cdots j_s}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}(j_1<\cdots<j_s)$ 是两个外形式,则定义乘积 $\omega^{(k+s)}=\omega^{(k)}\wedge\omega^{(s)}$ 为这样的形式

$$\begin{aligned}\omega^{(k+s)}&=(T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})\wedge(P_{j_1\cdots j_s}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s})\\&=T_{i_1\cdots i_k}P_{j_1\cdots j_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}(i_1<\cdots<i_k;j_1<\cdots<j_s)\\&=T_{[i_1\cdots i_k}P_{j_1\cdots j_s]}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k+s}}(i_1<\cdots<i_{k+s}).\end{aligned}$$

显然,形式的乘法与相应张量场的外乘一致. 于是 $\Lambda(M^n)$ 是具有单位元的代数;乘法是可群的,但是不可交换的. 代数 $\Lambda(M^n)$ 分解为子空间 $\Lambda^k(M^n)=\{T_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\}$的直和. 数 k 称为形式 $\omega^{(k)}$ 的阶,元素 $\omega^{(k)}$ 称为代数 $\Lambda(M^n)$ 的齐次元素. 微分形式 $\omega^{(k)}$ 解释为多重线性的反对称映射是合适的. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k\in T_*(M^n)$,那么计算得到 $dx^i(\boldsymbol{a})=a^i$,

$$\begin{aligned}\omega^{(k)}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)&=(T_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)\\&=T_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{[i_1}(\boldsymbol{a}_1)\cdot\cdots\cdot dx^{i_k]}(\boldsymbol{a}_k)=T_{i_1\cdots i_k}(x)a_1^{[i_1}\cdots a_k^{i_k]}\\&=T_{[i_1\cdots i_k]}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}=T_{i_1\cdots i_k}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}.\end{aligned}$$

于是

$$\omega^{(k)}:\underbrace{T_x\times\cdots\times T_x}_{k}\to R;\omega^{(k)}(\boldsymbol{a}_{\sigma(1},\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k)})=(-1)^{\sigma}\omega^{(k)}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k).$$

我们考察 $\mathbf{R}^n$,并设 $x^1,\cdots,x^n$ 是笛卡儿坐标. 设 $\omega^{(n)}=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是最大秩的外形式;$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组向量. 用 $\mathrm{vol}\Pi(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$表示 n 维平行六面体 $\Pi(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$(由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 所张成)的体积. 由代数教程知道有下面的引理.

引理 4 设 $A=\begin{pmatrix}a_1^1&\cdots&a_1^n\\\vdots&&\vdots\\a_1^n&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}$是由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的坐标构成的矩阵,那么 $\det(A)=\mathrm{vol}\Pi(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

回到外形式上来.

引理 5 设在 $\mathbf{R}^n$ 上建立了笛卡儿坐标,并设 $\omega^{(n)}=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是最大秩的形式. 那么 $\omega^{(n)}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{vol}\Pi(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

证明 因为 $dx^i(\boldsymbol{a})=a^i$,所以,

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)&=(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\&=a_1^{[i_1}\cdot\cdots\cdot a_n^{i_n]}=\det A.\end{aligned}$$

引理证毕.

于是,平行六面体(作为外形式的值)的体积不是数量;例如,在 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 奇置换时,它要改变符号. 这是"有向体积"这个把体积作为外形式的值的观点是有

效的.

对较小阶的形式,类似的解释也是可能的. 假设在 $\mathbf{R}^n$ 中给出形式 $\omega^{(k)}=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$. 要求对 $\mathbf{R}^n$ 中的一组向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$,求出 $(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ 的值. 证明 $\omega^{(k)}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k)=\mathrm{vol}\Pi(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$,这里 $\Pi(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$ 是位于坐标平面 $\mathbf{R}^k(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})$ 中,由向量 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k\in\mathbf{R}^k$ 所张成的 k 维平行六面体的体积,其中 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 是向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 在平面 $\mathbf{R}^k(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})$ 上的垂直射影(参看图 5.3)

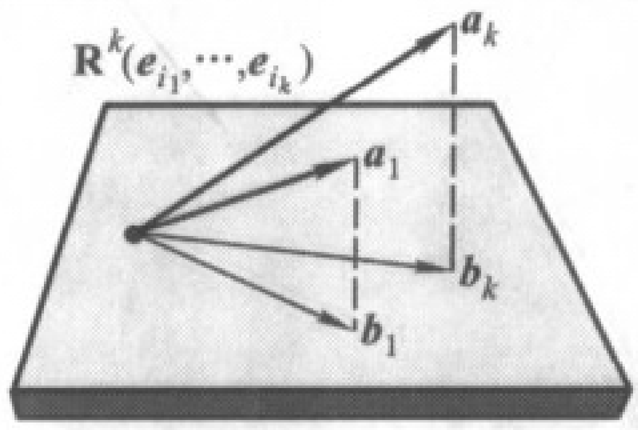


图 5.3

若形式 $\omega^{(k)}$ 是形式 $\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 的组合,则它在 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 上的值将是体积 $\mathrm{vol}\Pi(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$ 带有"权" $\omega_{i_1\cdots i_k}$ 的线性组合.

我们指出在黎曼流形上外形式与区域体积的关系. 我们认为读者对多维(重)黎曼积分的概念是熟悉的. 设 M^n 是黎曼流形,D 是 M^n 中的开区域,它同胚于建立了笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 的 $\mathbf{R}^n$ 中开区域 U,设 $g(x)$ 是矩阵 $(g_{ij}(x))$ 的行列式.

定义 4 称数

$$V(D)=\mathrm{vol}(D)=\int\cdots\int_{U(x)}\sqrt{g(x)}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

为**区域 $D\subset M^n$ 的体积**,其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是区域 $U(x)\subset\mathbf{R}^n$ 中的笛卡儿坐标.

如果流形上的区域"很大",即不被一个图覆盖,那么它的体积借助于给出的光滑图册的 1 的分解来确定.

这个定义的根据是,在最简单的情况下,此公式导出的值与由其他的设想所得到的体积值是相同的.

(1) 设 $M^n=\mathbf{R}^n$,$U=D\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域,$g_{ij}=\delta_{ij}$,即 $g(x)\equiv1$,所以

$$\mathrm{vol}(D)=\int\cdots\int_{U(x)}dx^1\cdots dx^n\ ,$$

这与 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域通常的欧氏体积的定义是一致的. 如果把 $dx^1,\cdots,dx^n$ 看作是无穷小量,那么 $d\sigma=dx^1\cdot\cdots\cdot dx^n$ 是边长为 $dx^1,\cdots,dx^n$ 的无穷小平行六面体的体积. 于是,有界区域 $U(x)\subset\mathbf{R}^n$ 的体积可以为无穷多个无穷小平行六面体体积的"和".

(2) 设 M^n 是 $\mathbf{R}^N$ 中的子流形,$g_{ij}(x)$ 是在 $M^n\subset\mathbf{R}^N$ 上诱导的黎曼度量. 设 $x^1,\cdots,x^n$ 是 M^n 上点 P 的邻域中的曲线坐标;设区域 D"不大",即包含其在坐标邻域之中;于是可以认为区域 D 的体积 $\mathrm{vol}(D)$ 是无限多个无穷小平行六面体(已不是直角平行六面体)$\{\Pi_k\}$ 之和,Π_k 是用弯曲的坐标平面 $x^i=$ 常数$(1\leqslant i\leqslant n)$(具有"无穷小的步长")分解区域 D 而得到(参看图 5.4).

因为 M^n 是光滑流形,所以 Π_k 可很好地用包含在 $T_P(M^n)$ 中的"直线"平行六面体 $\tilde{\Pi}$ 来近似,这里 P 是 $\tilde{\Pi}_k$ 的顶点(参看图 5.5). Π_k 的边的指向是沿着经过 P 的坐标线 $\{x^i\}$ 的方向. 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots.\ \boldsymbol{a}_n$ 是这些线的速度向量. 因为 g_{ij} 是欧氏度量的诱

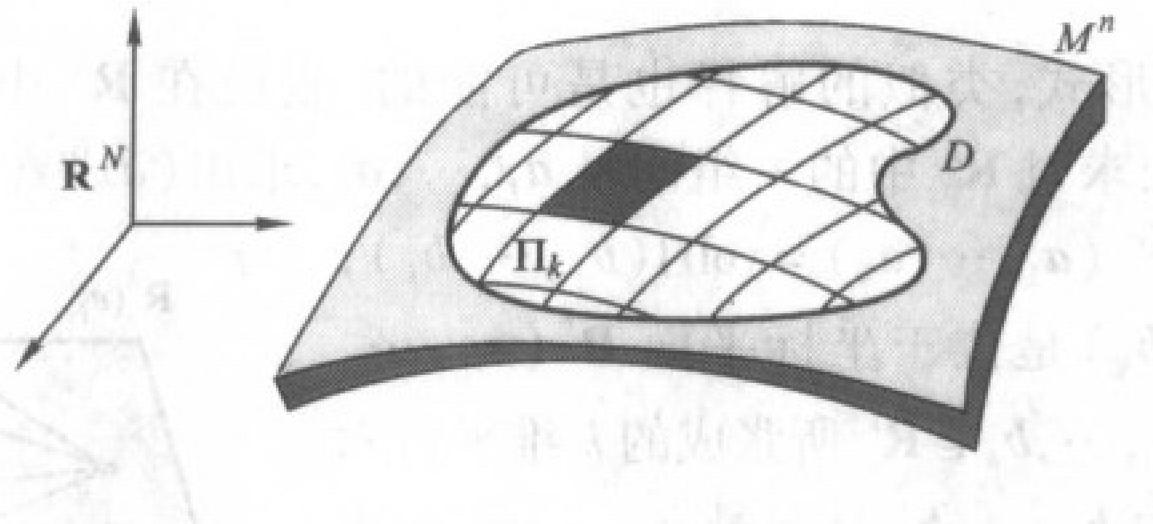


图 5.4

导度量，所以 $\mathrm{vol}(\Pi_k) \cong \mathrm{vol}(\tilde{\Pi}_k)$ 与 $\mathbf{R}^n$ 中的欧氏体积 $\tilde{\Pi}_k$ 一致. 于是，$\mathrm{vol}(D) \cong \sum\limits_{(k)} \mathrm{vol}(\tilde{\Pi}_k)$. 在 P 点附近，除原来的曲线坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 外，引进在 P 点正交的坐标 $y^1, \cdots, y^n$，即在 $T_P(M^n)$ 中给出笛卡儿坐标. 设 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是这些新坐标线在 P 点的单位速度向量. 这时在 P 点有 $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$. 设 J 为变换在 P 点的 Jacobi 矩阵. 这时，J 把 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 变为 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$. 我们证明 $\mathrm{vol}(\tilde{\Pi}_k) = \sqrt{g(x)}\, d\sigma^n$，这里 $d\sigma^n = dx^1 \cdot \cdots \cdot dx^n$ 是由 $dx^1, \cdots, dx^n$ 构成的直角平行六面体的欧氏体积. 我们考察由 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 构成的平行六面体 Π'_k. 这时，$\mathrm{vol}\Pi'_k(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sqrt{g(x)}$. 事实上，因为 $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$，所以 $(g_{ij}(x)) = J(g_{ij}(y))J^{\mathrm{T}} = JEJ^{\mathrm{T}} = JJ^{\mathrm{T}}$，即 $\det J = \sqrt{g(x)}$. 由引理 4，$\sqrt{g(x)} = \det J = \mathrm{vol}\Pi'_k(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$. 证明了结论.

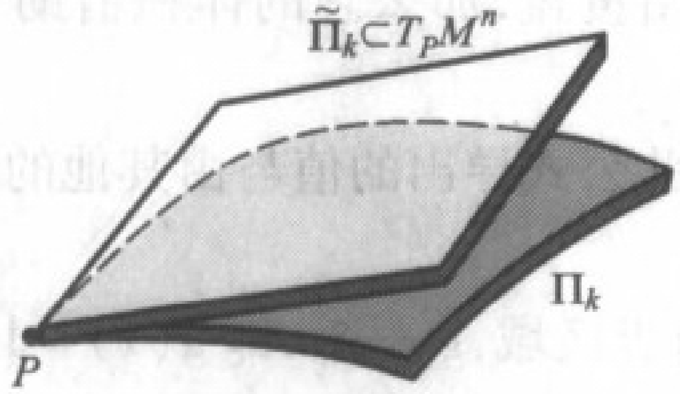


图 5.5

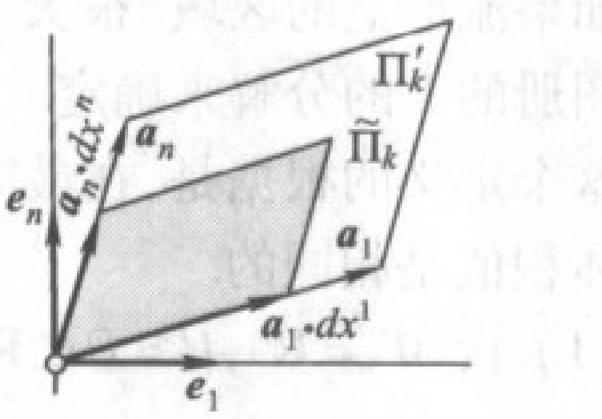


图 5.6

因为 $\tilde{\Pi}_k$ 由 $(dx^1)\boldsymbol{a}_1, \cdots, (dx^n)\boldsymbol{a}_n$ 构成（参看图 5.6），所以

$$\mathrm{vol}\tilde{\Pi}_k(\boldsymbol{a}_1 dx^1, \cdots, \boldsymbol{a}_n dx^n) = \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \cdots \cdot dx^n.$$

因为由 $\tilde{\Pi}_k$ 的体积（它们的总和），以及它们装满了区域 D 的体积，所以 $\mathrm{vol}(D) = \int\limits_{U(x)}\cdots\int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \cdots \cdot dx^n$，并且这就是所要求的.

（3）设 $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ 是光滑子流形，它由向径 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 给出；那么，M^2 上区域 D 的面积有

$$\mathrm{vol}(D) = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

$$= \iint\limits_{U(v)} |\, [\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v] \,|\, du dv,$$

其中[,]表示向量积,而|[,]|表示它的模.

(4) 设由光滑函数 $x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 的图像形式给出的子流形 $M^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$. 求有界区域 $D\subset M^{n-1}$ 的体积. 可以认为, $\mathrm{vol}(D)=\sum(d\sigma)$, 这里 $d\sigma$ 是无穷小平行六面体的体积. 把它射影到坐标的超平面 $\mathbf{R}^{n-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 上时, 得到无穷小体积 $d\omega=dx^1\cdot\cdots\cdot dx^{n-1}$, 它与 $d\sigma$ 的关系为 $d\sigma=\dfrac{d\omega}{\cos\alpha}$ (参看图 5.7). 这里, α 是 M^{n-1} 的法线 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角. 显然, $\cos\alpha=(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{m})$, 其中 $\boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)$; $\boldsymbol{m}=\dfrac{\mathrm{grad}F}{|\mathrm{grad}F|}$,

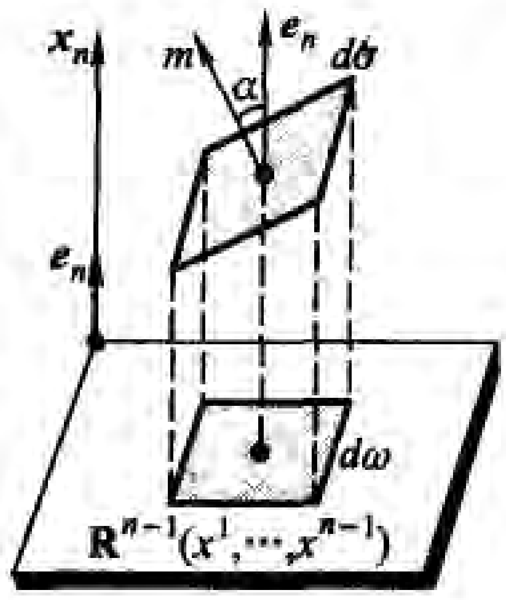


图 5.7

而

$$F(x^1,\cdots,x^n)=x^n-f(x^1,\cdots,x^{n-1});$$

即

$$d\sigma=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}\,dx^1\cdot\cdots\cdot dx^{n-1}.$$

于是,

$$\mathrm{vol}(D)=\int\cdots\int_{U(x^1,\cdots,x^{n-1})}\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}\,dx^1\cdot\cdots\cdot dx^{n-1}.$$

这个公式与上面关于体积一般的定义的公式一致. 事实上, 我们已知 M^{n-1} 上诱导度量为

$$ds^2=(1+(f_{x^i})^2)(dx^i)^2+2f_{x^i}f_{x^j}dx^idx^j;$$

由此, $g(x)=1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_{x^i}^2$ (验证!). 例如, 若 $n=3$, 则 $g(x)=1+f_x^2+f_y^2$.

练习 求出 Лобачевский 平面上和二维球面上半径为 r 的圆的面积.

于是, 我们提出了在黎曼流形上关于区域体积的一般公式的几点根据

$$\mathrm{vol}(D)=\int\cdots\int_{U(x)}\sqrt{g(x)}\,dx^1\cdots dx^n,$$

特别是, 对 vol(D), 存在着表达式

$\mathrm{vol}(D)=\int\cdots\int_{U(x)}\sqrt{g(x)}\cdot(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(\boldsymbol{a}_1dt^1,\cdots,\boldsymbol{a}_ndt^n)$, 这里, $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是在 P 点切于坐标线 $\{x^i\}$ 的速度向量, 而 $dt^1,\cdots,dt^n$ 是由 P 点沿着这些线的无穷小量位移; 这些位移构成无穷小平行六面体 $\tilde{\Pi}_k(\boldsymbol{a}_1dt^1,\cdots,\boldsymbol{a}_ndt^n)$. 所以体积公式就表示为上面所指出的形式. 通常, 写为简略的形式: $\int\cdots\int_{U(x)}\sqrt{g(x)}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 这就是上面所导出的展开的形式.

很明显, 这个积分不依赖于局部坐标系的选择. 事实上, 若作变换 $(x)\to(y)$,

则

$$\int_{U(y)}\cdots\int \sqrt{g(y)}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=\int_{U(y)}\cdots\int(\det J_y)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

$$=\int_{U(y(x))}\cdots\int(\det J_x)\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\cdot\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_{U(y(x))}\cdots\int\sqrt{g(x)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

5.3 联络和共变微分

5.3.1 仿射联络的定义和性质

在实际问题中，必然要出现对张量场进行微分. 在这种情况下，应使微分是张量运算，即使张量变为张量. 在曲线坐标中对张量分量的通常的微分是这个运算的前身. 为简单起见，我们取共变场 $T_{i_1\cdots i_k}$，考察函数 $P_{\alpha;i_1\cdots i_k}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T_{i_1\cdots i_k}$，即考察通常的偏导数. 在另一个坐标系中偏导数应取 $P_{\alpha';i'_1\cdots i'_k}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}T_{i'_1\cdots i'_k}$. 问题：这组函数构成张量场 P 吗？换句话说，在坐标变换时这组函数按张量规则变换吗？我们来检查这个演算. 在 (x) 变到 (x') 时，有

$$P_{\alpha';i'_1\cdots i'_k}=\frac{\partial T_{i'_1\cdots i'_k}}{\partial x^{\alpha'}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}T_{i_1\cdots i_k}\right)$$

$$=P_{\alpha;i_1\cdots i_k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}+T_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\right).$$

于是

$$P_{\alpha';i'_1\cdots i'_k}=P_{\alpha;i_1\cdots i_k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}+S_{\alpha' i'_1\cdots i'_k}(T,x,x'),$$

$$S_{\alpha' i'_1\cdots i'_k}=T_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\right).$$

在一般形式的变换 $(x)\to(x')$ 下，一般地说，表示式 $S_{\alpha' i'_1\cdots i'_k}$ 不为 0，即 $P_{\alpha i_1\cdots i_k}$ 不按张量规则变换。仅在特殊情况下，它才是张量，例如，在坐标的线性变换时，因为此时有

$$S_{\alpha' i'_1\cdots i'_k}\equiv 0.$$

我们的目的是要学会对张量场的微分在任意坐标系下都是不变的. 首先，局限于欧氏空间，除笛卡儿坐标外，考虑所有可能的曲线坐标. 我们要找的运算用 ∇ (nabla) 表示，并作如下要求：

(1) 在 $\mathbf{R}^n$ 的笛卡儿坐标中,运算∇应当与通常的微分$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$一致.

(2) 运算∇应该是张量运算,即如果 T 是张量场,那么∇T 也应该是张量场.

我们从举例开始. 考察 $\mathbf{R}^n$ 上的向量场 T^i;设(x)是笛卡儿坐标,(x')是曲线坐标. 写出加在∇上的要求(1)和(2). 这时,在坐标系(x)中有$(\nabla T)^i_j = \frac{\partial T^i}{\partial x^j}$;在变为坐标系$(x')$时,应该有$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)^i_j$. 找出$\nabla$的明显的形式,我们有

$$
\begin{aligned}
(\nabla T)^{i'}_{j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}T^{k'}\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} \\
&\quad + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T^{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) \\
&= \delta^{i'}_{k'}\delta^{\alpha'}_{j'}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T^{k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}};
\end{aligned}
$$

$$
(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{j'k'};\ \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.
$$

于是,出现了某些函数 $\Gamma^{i'}_{j'k'}$,这是∇与通常的(欧氏的)微分运算上的偏差.

现在,我们考察 $\mathbf{R}^n$ 上的共变向量场 T_i,为了寻找∇加在 T_i 上的明显表达式,应该再来解方程组

$$
(\nabla T)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j};(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)_{ij}.
$$

类似于前面的情况,我们得到(验证!)

$$
(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'};
$$

其中,$\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 k'}{\partial x^j\partial x^i}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)$. 它是$\nabla$与通常的微分运算对共变场的偏差.

引理 1 成立等式 $\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}$.

证明 关于 $x^{p'}$ 微分明显的恒等式

$$
\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \delta^{i'}_{k'},
$$

得到 $\Gamma^{i'}_{j'k'} + \tilde{\Gamma}^{i'}_{j'k'} = 0$. 引理证毕.

于是,加在向量场和共变向量场上的运算(在 $\mathbf{R}^n$ 的曲线坐标中)∇有形式

$$
(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{k'j'};
$$

$$
(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} - T_{k'}\Gamma^{k'}_{i'j'}.
$$

现在，考察∇对算子场的运算，即对(1,1)型场的运算，我们有

$$(\nabla T)^{i}_{jk}=\frac{\partial}{\partial x^{k}}(T^{i}_{j});$$

$$\begin{aligned}(\nabla T)^{i'}_{j'k'}&=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{j}}T^{\alpha'}_{p'}\right)=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{j}}\frac{\partial T^{\alpha'}_{p'}}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^{k}}\\&+T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^{2}x^{i}}{\partial x^{q'}\partial x^{\alpha'}}\cdot\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{j}}\\&+T^{\alpha'}_{p'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^{2}x^{p'}}{\partial x^{k}\partial x^{j}}\\&=\frac{\partial}{\partial x^{k'}}(T^{i'}_{j'})+T^{p'}_{j'}\Gamma^{i'}_{p'k'}-T^{i'}_{p'}\Gamma^{p'}_{j'k'}.\end{aligned}$$

于是，我们得到了∇作用在T^{i}_{j}上的运算.

定理1 设$M^{n}=\mathbf{R}^{n}$，(x)是笛卡儿坐标，(x')是曲线坐标. 则在$\mathbf{R}^{n}$中存在张量运算∇，它对任何张量场$T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_q}$的运算由下面的公式给出

$$\begin{aligned}(\nabla T)^{i'_1\cdots i'_k}_{j'_1\cdots j'_q;\alpha'}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}(T^{i'_1\cdots i'_k}_{j'_1\cdots j'_q})&+\sum_{s=1}^{k}T^{i'_1\cdots i'_s=q'\cdots i'_k}_{j'_1\cdots j'_p}\Gamma^{i'_s}_{q'\alpha'}\\&-\sum_{s=1}^{p}T^{i'_1\cdots i'_k}_{j'_1\cdots j'_s=q'\cdots j'_p}\Gamma^{q'}_{j'_s\alpha'},\end{aligned}$$

其中的函数$\Gamma^{i'}_{j'q'}$在变换$(x')\to(x'')$时变为

$$\Gamma^{i''}_{j''k''}=\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\Gamma^{i'}_{j'k'}+\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^{2}x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.$$

证明 逐字逐句的重复上面所作出的对向量场、共变向量场和算子场的计算，就可建立起∇对$T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_q}$进行运算的明显表达式，重复的次数正好是场$T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_q}$的秩数. 写出此公式一事留给读者作为必须完成的练习. 我们来考察$\Gamma^{i'}_{j'k'}$的变换规则. 有

$$\begin{aligned}\nabla_{k''}T^{i''}&=\frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}}+T^{p''}\Gamma^{i''}_{p''k''}\\&=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}T^{i'}\right)+\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}T^{p'}\Gamma^{i''}_{p''k''}\\&=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}}+T^{i'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^{2}x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{i'}}+T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''},\end{aligned}$$

$$\nabla_{k''}T^{i''}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\nabla_{k'}T^{i'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}}+T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'k'}\right).$$

比较所得结果，得到

$$T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{p'k'}=T^{p'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^{2}x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}+T^{p'}\frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}}\Gamma^{i''}_{p''k''}.$$

因为对任意场$T^{i'}$这应是恒等式，所以

$$\Gamma^{i''}_{p''k''}=\Gamma^{i'}_{p'k'}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}-\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^{2}x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}.$$

由引理 1

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} = -\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}.$$

定理证毕.

我们仅证明了,"张量的微分"存在定理对 $M^n = \mathbf{R}^n$,即在"存在"笛卡儿坐标时是正确的. 这使我们能以显式计算函数 $\Gamma^{i'}_{j'k'}$. 现在,我们考察任意的光滑流形,用公理的方法给出新的运算 ∇,以上面在 $\mathbf{R}^n$ 中定义的 ∇ 的性质作为新的运算的基础.

定义 1 在光滑流形 M^n 上,如果对每一个光滑图册,在每一个图中都给出一组光滑函数 Γ^i_{jk}(称为 Christoffel 符号),在坐标变换时,它按规则

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}$$

变换,则说在 M^n 上给出了**共变微分运算** ∇. 这时,∇ 由下面公式给出:

$$(\nabla T)^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_p;\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}) + \sum_{s=1}^{k} T^{i_1\cdots i_s=q\cdots i_k}_{j_1\cdots j_p}\Gamma^{i_s}_{q\alpha} - \sum_{s=1}^{q} T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_s=q\cdots j_p}\Gamma^{q}_{j_s\alpha}.$$

存在这样的 M^n,在 M^n 上可以引进 ∇,我们上面已证明了,$M^n = \mathbf{R}^n$ 时是可以的;这时 Γ^i_{jk} 由上面所得到的公式给出. 函数组 Γ^i_{jk} 不构成张量,这一点是重要的! Christoffel 记号,仅在特殊情形下,例如在线性的坐标变换时,它们按张量的规则变换. 有时说 Christoffel 符号(或 ∇)给出了 M^n 上的**仿射联络**. 如果坐标是固定的,那么 ∇ 就作为运算 ∇_k 的总体,而 ∇_k 是关于各个坐标的共变微分.

定义 2 在每个坐标系中用等式 $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ 给出的张量称为仿射联络 Γ^i_{jk} 的**挠率张量**.

引理 2 函数组 Ω^i_{jk} 确实构成张量.

证明 利用 Christoffel 符号的变换规则和 $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ 关于下指标的交换,由于"非张量的补充项"关于 j' 和 k' 的对称性,我们得到公式

$$\Omega^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Omega^i_{jk}.$$

引理证毕.

定义 3 若挠率张量等于 0,则联络(或共变微分)∇ 称为是**对称的**.

我们在 $\mathbf{R}^n$ 中引进的联络是对称的(验证!). 在任意的 M^n 上,Christoffel 符号已不像在 $\mathbf{R}^n$ 中那样,必须为坐标的二次偏导数的形式.

命题 1 共变微分(联络)∇ 满足下列关系:

(1) 运算 $\nabla = \{\nabla_k\}$ 是线性的;

(2) 对任何张量 $T^{(i)}_{(j)}$,函数组 $\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = (\nabla T)^{(i)}_{k;(j)}$ 构成张量场;

(3) 若张量场是数量场(即 M^n 上的光滑函数 f),则 $\nabla f = \{\nabla_k f\} = \{\frac{\partial f}{\partial x^k}\} = \mathrm{grad}\, f$;

(4) ∇对向量场 T^i 的运算有形式

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}.$$

∇对共变向量场 T_i 的运算有形式

$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ik}.$$

(5) 运算∇满足 Leibniz 公式

$$\nabla_k (T^{(i)}_{(j)} \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)}) = (\nabla_k T^{(i)}_{(j)}) \cdot P^{(\alpha)}_{(\beta)} + T^{(i)}_{(j)} \cdot (\nabla_k P^{(\alpha)}_{(\beta)}),$$

其中 $T^{(i)}_{(j)}$ 和 $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ 为任意的张量场.

证明　性质(1)—(4)由∇的定义立即可得. 留下的就是要证明(5). 考虑最简单的情形:张量场 $T^{(i)}_{(j)}$ 和 $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$ 中有一个是数量场. 这时(5)由对数量函数的 Leibniz 公式得到. 现在,设 T 和 P 是向量场 T^i, P^j,我们有

$$\begin{aligned}\nabla_k (T^i \cdot P^j) &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i \cdot P^j) + T^\alpha P^j \Gamma^i_{\alpha k} + T^i P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k} \\ &= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k}\right) P^j + T^i \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^k} + P^\alpha \Gamma^j_{\alpha k}\right) \\ &= (\nabla_k T^i) P^j + T^i (\nabla_k P^j).\end{aligned}$$

对于任意场 P 和 T 的证明,把指标 i, j 变换成多重指标$(i),(j)$以后,类似地证明. 命题证毕.

定理 2　设在 M^n 上给出运算$\nabla = \{\nabla_k\}$,满足(1)—(5)(参看命题 1). 则对任意的张量场 $T^{(i)}_{(j)}$ 成立

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \nabla_k T^{i_1 \cdots i_\alpha}_{j_1 \cdots j_p} = \frac{\partial}{\partial x^k}(T^{i_1 \cdots i_\alpha}_{j_1 \cdots j_p}) + \sum_{q=1}^{\alpha} T^{i_1 \cdots i_q = r \cdots i_\alpha}_{j_1 \cdots j_p} \Gamma^{i_q}_{rk} - \sum_{s=1}^{p} T^{i_1 \cdots i_\alpha}_{j_1 \cdots j_s = \omega \cdots j_p} \Gamma^{\omega}_{j_s k},$$

即∇是在我们所定义(参看上面)的意义下的共变微分. 性质(1)—(5)唯一地决定了运算∇,也就是说,它可以借助于性质(1)—(5)用公理的方法引入.

证明　把∇作用在数量函数和秩为 1 的张量场上已依照(1)—(4)给出了. 留下的是找出∇_k 对任何型张量的运算.

我们证明一个**引理**:任何张量场可分解为秩为 1 的场的乘积的线性组合(带有光滑的系数). 事实上,任何张量场就是多重线性映射:

$$T = a^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$$

其中 $e_{i_\alpha}, e^{j_\alpha}$是秩为 1 的场,并且 $a^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_q}$是光滑函数. 设$\{T^\alpha_{i_s}\}$是张量 e_{i_s}的一组分量;相应地 $T^{j_s}_\beta$是 e^{j_s}的一组分量. 那么

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\beta_1 \cdots \beta_q} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_q},$$

其中

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_q}=a^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_q}T^{\alpha_1}_{i_1}T^{\alpha_2}_{i_2}\cdots T^{\alpha_k}_{i_k}T^{j_1}_{\beta_1}\cdots T^{j_q}_{\beta_q}.$$

我们回到定理的证明上来. 为简单起见,我们考虑秩为 2 的情形(对任意的场可类似地得到). 由 ∇ 的线性性,就足以验证公式(5),对单项式 $T_{ij}=\alpha(x)T_iP_j$,$\alpha(x)$ 是光滑函数,成立. 按照 Leibniz 公式(5),有

$$\begin{aligned}\nabla_k(T_{ij})=\nabla_k(\alpha(x)T_iP_j)&=\frac{\partial\alpha}{\partial x^k}T_iP_j+\alpha\left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k}-T_p\Gamma^p_{ik}\right)P_j\\&\quad+\alpha T_i\left(\frac{\partial P_j}{\partial x^k}-P_q\Gamma^q_{jk}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x^k}(T_{ij})-\Gamma^p_{ik}T_{pj}-\Gamma^q_{jk}T_{iq},\end{aligned}$$

这就是所要求的. 定理证毕.

定义 4 设 ∇ 是 M^n 上的仿射联络,若对局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$,有 $\Gamma^i_{jk}(x)=0$,则称此坐标是**欧氏的**.

这样的坐标也可能不存在,例如,若 ∇ 不是对称时就是这样. 事实上,在这样的情况下,$\Omega^i_{jk}\neq0$. 若存在坐标,在此坐标中,$\Gamma^i_{jk}\equiv0$,则 Ω^i_{jk} 也为 0,而这时由于张量的性质,在任何坐标系下它都恒为 0.

一般,共变微分与黎曼度量决无关系. 黎曼度量和仿射联络是 M^n 上不同的结构. 特别,对仿射联络的欧氏坐标以及对度量 g_{ij} 的欧氏坐标(即在此坐标中有 $g_{ij}=\delta_{ij}$),这是不同的概念.

现在,设在 M^n 上给出了度量 g_{ij}. 这时,在所有对称的仿射联络中可以分出一个(且仅仅一个)联络,使此联络与此度量"一致",并且完全由它确定. 这样的联络称为黎曼联络.

5.3.2 黎曼联络

定义 5 黎曼流形上对称的仿射联络 $\nabla=\{\Gamma^i_{jk}\}$,若 $\nabla(g_{ij})\equiv0$,则称此联络与度量 g_{ij} 一致(或称为**黎曼联络**).

由于 ∇ 的张量性,恒等式 $\{\nabla_k(g_{ij})=0\}$,在任何坐标系中都成立. 于是,关于黎曼联络,在这样的意义下张量 g_{ij} 是"常量",就是说它的共变导数等于0. 特别,对任何张量场 $T^{(p)}_{(q)}$,有 $\nabla_k(g_{ij}T^{(p)}_{(q)})\equiv g_{ij}(\nabla_kT^{(p)}_{(q)})$. 参看 Leibniz 公式.

定理 3 设 g_{ij} 是 M^n 上的黎曼度量. 则存在唯一的对称仿射联络与 g_{ij} 一致,并且

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right).$$

证明 假设存在性已经证明,我们指出联络的唯一性. 按照定义,$\nabla_k(g_{ij})=0$,由此唯一地导出 Γ^i_{jk} 作为 g_{ij} 的函数时,就足以证明唯一性了. 我们有

$$\nabla_k g_{ij}=0,\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik}+g_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{jk}.$$

循环变换指标,得到

$$\begin{array}{rl} + & \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{j;ik}+\Gamma_{i;jk} & (ijk) \\ \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}=\Gamma_{i;kj}+\Gamma_{k;ij} & (kij) \\ \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}=\Gamma_{k;ji}+\Gamma_{j;ki} & (jki) \end{array}\right. \\ + & \\ - & \end{array}$$

其中 $\Gamma_{i;kj}=g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj}$. 把前面两式相加并从和中减去第三式,得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}=2\Gamma_{i;jk}=2g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{jk}.$$

(注意:$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$)于是

$$\Gamma^{\alpha}_{jk}=\frac{1}{2}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right).$$

这里,我们对方程组 $g_{\alpha\beta}T^{\alpha}=Q_{\beta}$ 求解,因为 $g_{\alpha\beta}$ 是非退化的张量,所以存在逆张量 $g^{\alpha\beta}$,由此 $T^{\alpha}=g^{\beta\alpha}Q_{\beta}$. 于是,若原来方程组的解存在,那么解就是唯一的. 为了证明存在性,借助于上面所得的公式来定义 Γ^i_{jk} 即可. 重复相反过程的计算,我们得到:$\nabla_k(g_{ij})\equiv 0$. 定理证毕.

注意　设在 M^n 上存在坐标 $x^1,\cdots,x^n$,在此坐标中 $g_{ij}=\delta_{ij}$. 这样的坐标系存在等价于存在坐标系,在此坐标系中 (g_{ij}) 变为常数矩阵(不依赖于点). 这时,借助于线性变换可以把这个矩阵(同时,在这个邻域中的所有点)化为 δ_{ij} 的形式. 于是,若一个坐标系中度量张量的矩阵是常量矩阵,则可以称此坐标为欧氏的. 我们回到黎曼联络上来.

命题 2　从黎曼联络与 g_{ij} 一致的观点上看来,欧氏坐标系当且仅当从 g_{ij} 的观点看来(即 g_{ij} 是局部常量),它是欧氏坐标系.

证明　事实上,若 g_{ij} 是局部常量,则由于定理 3,$\Gamma^i_{jk}\equiv 0$. 反之,若 $\Gamma^i_{jk}=0$,则由于定理 3,$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik}+g_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{jk}=0$,也就是 g_{ij} 在这些坐标中为常量. 这就是所要求的. 命题证毕.

考察光滑的超曲面 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$,它由图像 $x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 给出;设 $P_0\in V^{n-1}$ 是任意一点. 在该点,$T_{P_0}(V^{n-1})$ 平行于平面 $\mathbf{R}^{n-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})$,即 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x^i}=0$. 我们关于这样坐标系已算出了形式 g_{ij}. 我们有:$g_{ij}=\delta_{ij}+f_{x^i}f_{x^j}$. 由此,对联络,有 $\Gamma^i_{jk}(P_0)=0$,联络与 g_{ij} 一致. 在 P_0 的邻域中,函数 Γ^i_{jk} 可能非 0.

黎曼联络能够确切地定义流的散度. 注意,散度(无穷小体积的变化)概念本

身假定了在 M^n 上度量的存在,否则,体积的概念是没有定义的.

于是,设 $\boldsymbol{T}$ 是带有黎曼度量的 M^n 上的向量场,M^n 上具有黎曼联络. 我们假设 $\mathrm{div}(\boldsymbol{T}) = \nabla_i T^i$. 显然,$\mathrm{div}(\boldsymbol{T})$ 是数量函数.

命题 3 成立下面的公式

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln\sqrt{g}),$$

这里,g 是矩阵 (g_{ij}) 的行列式.

证明 由定理 3,我们有

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{T}) = \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha i}$$

$$= \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \cdot \frac{1}{2} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p}\right),$$

其次

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} T^\alpha g^{ip}\left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}\right),$$

这是因为

$$g^{ip}\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} - g^{ip}\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p} = 0.$$

我们断定

$$g^{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = 2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln\sqrt{g}).$$

注意,$g^{ip}\dfrac{\Delta_{ip}}{g}$,$\Delta_{ip}$ 是 g_{ip} 在矩阵 (g_{ij}) 中的余子式. 由此得到只要验证关系式:

$$\sum_{(i,p)} \Delta_{ip}\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g}{\partial x^\alpha}$$

即可.

行列式 g 是 n 次齐次单项式的和. 取出 g 的和式中包含 g_{ip} 的所有的项. 这时 $g = \cdots + g_{ip}R_{ip} + \cdots$,其中 R_{ip} 是次数为 $n-1$ 的多项式,它们已不包含 g_{ip}. 这时,$R_{ip} = \Delta_{ip}$. 计算 $\dfrac{\partial g}{\partial x^\alpha}$,我们看到 $\dfrac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}$ 进入到带有因子 Δ_{ip} 中,而这个和式的其他被加项中,即在 $A_{ip} = g - g_{ip}\Delta_{ip}$ 中没有函数 g_{ip}. 于是,$\dfrac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \sum\limits_{(i,p)} \dfrac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha}\Delta_{ip}$,这就是所要求的. 命题证毕.

5.4 平行移动 测地线

5.4.1 预先的观察

考察光滑流形(不必须是黎曼流形). 在许多问题中都要求比较附在不同点上的向量. 在任意的 M^n 的情况下,因为 $T_x(M^n)$ 和 $T_y(M^n)$ 是不同的,这个比较的问题是复杂的. 在 $M^n=\mathbf{R}^n$ 情况下,利用平行移动来比较位于不同点的向量. 形式上可以这样定义:考察一对点 P 和 Q,并设 $\boldsymbol{a}$ 是点 P 的向量;我们考虑光滑曲线 $\gamma(t),\gamma(0)=P,\gamma(1)=Q$;把 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\gamma(t)$ 平行移动,使得向量的起点在 $\gamma(t)$ 上滑动. 结果得到沿 γ 的向量场 $\boldsymbol{a}(t)$,它的分量为常量,等于 $\boldsymbol{a}$ 在开始时刻分量. 场 $\boldsymbol{a}(t)$ 的分量关于 t 的导数等于0. 在点 Q 的得到的向量 $\boldsymbol{a}(1)$ 与曲线 γ 的选择无关,在这个意义下,$\mathbf{R}^n$ 中的平行移动与道路无关.

在转移到任意的 M^n 上时,这个简单的方式就不适用了. 因为,在一般情况下,M^n 不能用一个图来覆盖它,即不能对所有的点引进一个共用的坐标系. 首先我们假设,M^2 光滑地嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中,并设 P,Q 是 M^2 上一对邻近的点. 设 $\boldsymbol{a}\in T_P(M^2)$,$\gamma$ 是曲面上从 P 到 Q 的曲线. 在 M^2 上的平行移动可建议为这样:把 $\boldsymbol{a}$ 看作为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量. 并按 $\mathbf{R}^3$ 的观点沿 γ 实行平移;这样得到 Q 点的某个向量 $\boldsymbol{b}$,但 $\boldsymbol{b}$ 已不必须在 $T_Q(M^2)$ 上了. 把 $\boldsymbol{b}$ 投影在 $T_Q(M^2)$ 上,并称投影 $\pi\boldsymbol{b}$ 为由 P 点的向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 γ 平行移动到 Q 的结果(参看图5.8). 这个结果与道路无关. 但这个做法的正确性仅在点 P 的小邻域中. 如果我们希望把 $\boldsymbol{a}$ 移动"远的距离",那么,就有可能所得的向量 $\pi\boldsymbol{b}$ 是零向量. 例如,此事发生在 S^2 上(参看图5.9). 如果进行在子午线的一半上,"平行移动"给出的结果是零向量,此结果应抛弃. 其实可以更细致地进行:沿 γ 移动无穷小的一步,并在每一步后施行所得到的向量在 $T_{\gamma(t)}(M^2)$ 上垂直射影. 原来,它确实给出了在 $M^2\subset\mathbf{R}^3$ 上的"平行移动". 我们将不详细地研究这个过程.

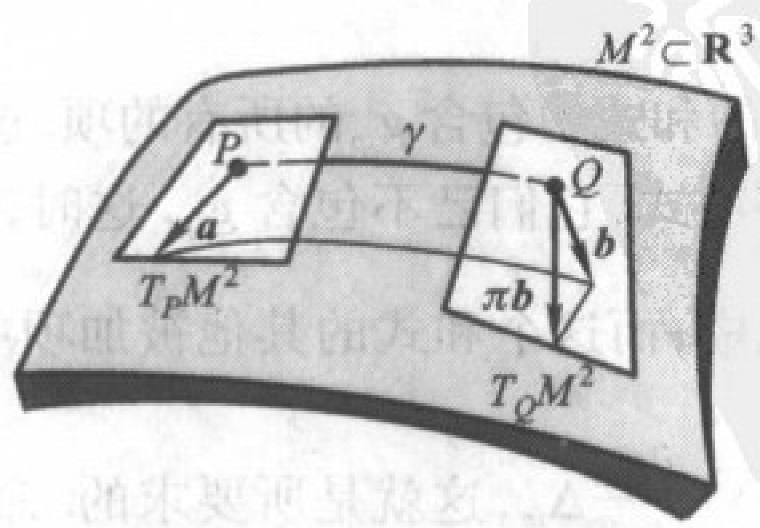


图5.8

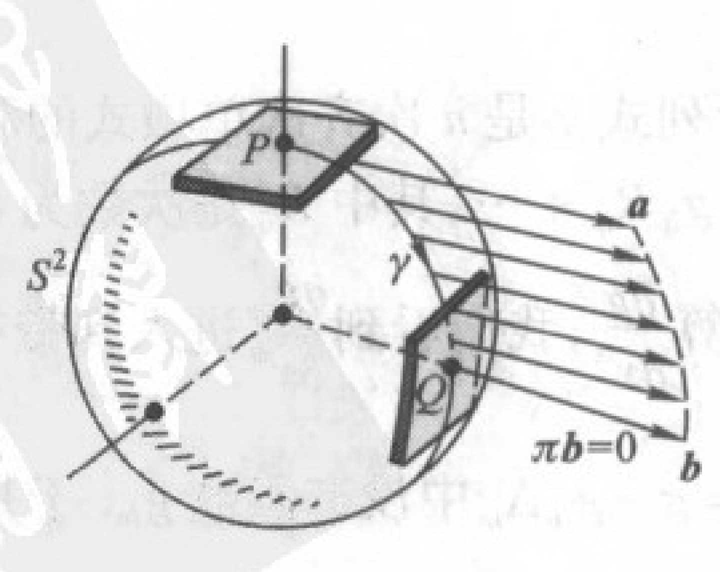


图5.9

读者注意,在定义平行移动时,我们不得不确定曲线,必须沿着此曲线实行平移. 平移的结果与道路有关还是无关? 在一般形式的流形上,预先是不明确的. 可能是有关的. 例如:沿着 Möbius 带的中心轴平行移动(参看图 5.10). 在此情况下,平移的结果与道路有关是 M^2 的不定向性的结果,但是,在定向的流形上,一般地说,平行移动将依赖于道路.

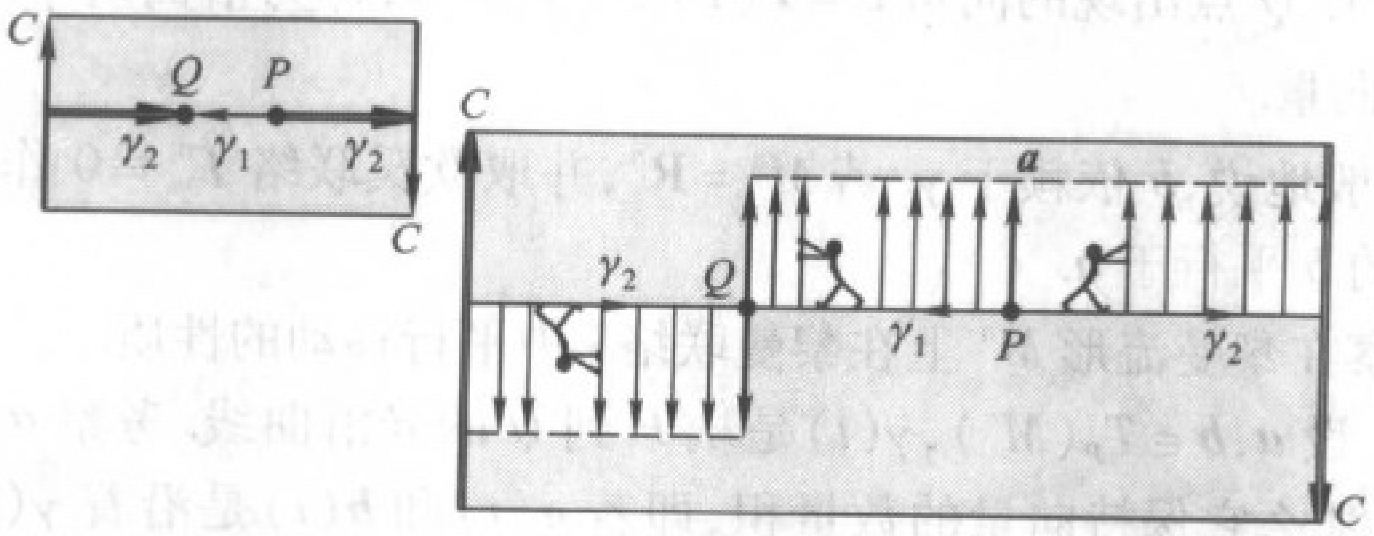


图 5.10

5.4.2 平行移动的方程

我们以微分运算∇作为 M^n 上平行移动概念的基础. 设 P,Q 是 M^n 上的两点,用光滑的(或逐段光滑的)轨线 $\gamma(t)$ 连接着,且 $\gamma(0)=P,\gamma(1)=Q$,设 $\dot{\gamma}$ 是沿$\gamma(t)$的速度场. 这个场的分量用 $\{\xi^k\}, 1\leqslant k\leqslant n$ 表示. 设在 M^n 上给出仿射联络 $\nabla=\{\nabla_k\}$. 用公式来定义张量场 $T=\{T_{(\beta)}^{(\alpha)}\}$ 沿着向量场 $\dot{\gamma}$ 的共变导数: $\nabla_{\dot{\gamma}}(T)=\{\nabla_{\dot{\gamma}}T_{(\beta)}^{(\alpha)}\}$. 我们约定: $\nabla_{\dot{\gamma}}=\xi^k\nabla_k$. 称此运算为**沿着曲线的共变微分**.

定义 1 设 $\boldsymbol{T}=\{T^i\}$ 是沿曲线的光滑向量场. 若 $\nabla_{\dot{\gamma}}(\boldsymbol{T})\equiv 0$, 则称此场沿着 $\gamma(t)$ 关于联络∇是平行的向量场.

换句话说,场 $\boldsymbol{T}$"沿着 $\gamma(t)$ 是平行的",有共变常数分量. 这与欧氏的情形相类似,因为对 $M^n=\mathbf{R}^n$ 的一般的平行的定义变为$\left\{\nabla_k=\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$,即为通常的平行移动.

我们用坐标写出场 $\boldsymbol{T}$ 的平行条件,有

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(T^i)=\xi^k\nabla_k T^i=0;\xi^k=\frac{dx^k(t)}{dt},$$

$$\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+T^p\frac{dx^k}{dt}\Gamma_{pk}^i=\frac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma_{pk}^i\frac{dx^k}{dt}=0.$$

定义 2 称方程$\dfrac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma_{pk}^i\dfrac{dx^k}{dt}=0$ 为沿曲线 $\gamma(t)$ 平行移动的方程.

γ 改变后,平行移动的方程也要改变.

设 $\gamma(t)$ 是由 P 到 Q 的光滑曲线,并设 $\boldsymbol{a}=\{a^i\}\in T_P(M^n)$ 是 P 点的向量. 我们的目的是在 Q 点作出新的向量 $\boldsymbol{b}\in T_Q(M^n)$,使 $\boldsymbol{b}$ 很自然地可命名为"与向量 $\boldsymbol{a}$ 平

行的向量". 考察沿γ的平行移动的方程;在此方程中,函数 Γ^i_{pk} 和$\frac{dx^k(t)}{dt}$是已知的;我们寻求函数$\{T^i(t)\}$——平行场 $T(t)$ 的分量. 同时在初始时刻满足条件 $T^i(0)=a^i$. 如常微分方程的教程中所知,方程组$\frac{dT^i}{dt}+T^p\Gamma^i_{pk}\frac{dx^k}{dt}=0$ 的解存在、唯一并且可延拓到 Q.

定义 3　在 Q 点出现的向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}(1)\in T_Q(M^n)$,称为沿曲线 $\gamma(t)$,平行于 $\boldsymbol{a}\in T_P(M^n)$ 的向量.

显然,一般地说,$\boldsymbol{b}$ 依赖于 γ. 若 $M^n=\mathbf{R}^n$,并取欧氏联络 $\Gamma^i_{jk}\equiv 0$ 作为∇,则是在通常意义下的 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$.

我们考察在黎曼流形 M^n 上在黎曼联络∇中平行移动的性质.

定理 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_P(M^n)$,$\gamma(t)$是从 P 到 Q 的光滑曲线. 考察 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 沿 $\gamma(t)$ 的平行移动. 那么它保持向量的数量积,即若 $\boldsymbol{a}(t)$ 和 $\boldsymbol{b}(t)$ 是沿着 $\gamma(t)$ 的平行场,$\boldsymbol{a}(0)=\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{b}$,则$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t)\rangle\equiv 0$,这里$\langle\,,\rangle$是由 g_{ij}产生的在 $T_{\gamma(t)}(M^n)$ 中的数量积.

证明　我们把 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 包含在平行场 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}(t)$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{b}(t)$之中,$\boldsymbol{T}(0)=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{b}$. 考察函数$f(t)=\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{R}\rangle_{\gamma(t)}=(g_{ij}T^iR^j)(t)$,即沿着 $\gamma(t)$ 的数量积. 进行微分,得到

$$\frac{df(t)}{dt}=\nabla_{\dot\gamma}f(t)=\xi^k\nabla_k(g_{ij}T^iR^j)=\xi^kg_{ij}\nabla_k(T^iR^j)$$

$$=g_{ij}R^j(\xi^k\nabla_kT^i)+g_{ij}T^i(\xi^k\nabla_kR^j)\equiv 0$$

这是因为$\nabla_{\dot\gamma}(\boldsymbol{T})=\nabla_{\dot\gamma}(\boldsymbol{R})=0$. 定理证毕.

反之也对:如果在黎曼流形 M^n 上给出对称的仿射联络,在 M^n 上沿任何曲线平行移动都保持数量积,那么这个联络是黎曼联络. 事实上,可从定理 1 的证明着手,我们得到:$\xi^kT^iR^j(\nabla_kg_{ij})\equiv 0$,即$\nabla_kg_{ij}=0$.

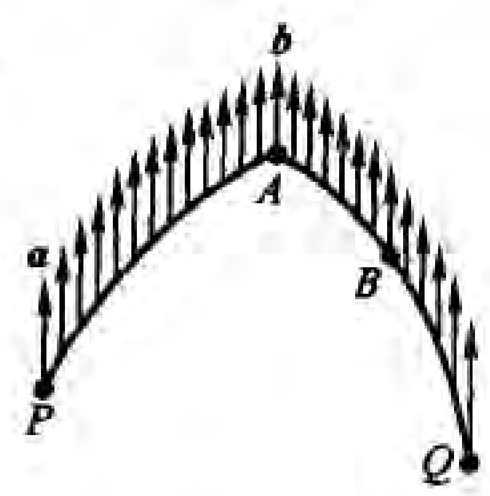


图 5.11

虽然我们实现了沿光滑曲线的平移,但也容易定义沿逐段光滑曲线的平移. 设在 $\gamma(t)$ 上有孤立的折断点(图 5.11). 沿着 $\gamma(t)$ 平移向量 $\boldsymbol{a}$,来到 A,并得到在 A 点平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的 $\boldsymbol{b}$. 我们把 $\boldsymbol{b}$ 当作新的平行场的初始向量,再沿着 AB 并重复平移的过程.

5.4.3 测地线

定义 4 设 M^n 配置了仿射联络(不假设度量的存在). 光滑曲线 $\gamma(t)$,如果 $\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})=0$,那么称 $\gamma(t)$ **在给定的联络 ∇ 下的测地线**,这里 $\dot{\gamma}$ 是轨线 $\gamma(t)$ 的速度向量场.

换句话说,测地线是这样的轨线,沿着它速度场是平行的,即速度向量平行移动时仍然是速度向量. 我们来导出测地线的方程.

我们有:

$$0=\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}),$$

因为 $T^i=\frac{dx^i}{dt}$,所以

$$\frac{dT^i}{dt}+T^\alpha T^k\Gamma^i_{\alpha k}=0,\text{或}\quad \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{\alpha k}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0.$$

我们得到了**测地线方程**. 它的解是一组函数 $x^1(t),\cdots,x^n(t)$,给出了测地线 $\gamma(t)$,这个方程组是 n 个方程的二阶常微分方程组. 它的解由初始给定的 $x^i(0)=P^i,\frac{dx^i(0)}{dt}=a^i,\boldsymbol{a}\in T_P(M^n)$ 唯一确定. 总共是 $2n$ 个常数:n 个常数确定点 P;另外 n 个常数确定在这点的速度向量. 这可由常微分方程理论立即得到.

命题 1 设 $P\in M^n,\boldsymbol{a}\in T_P(M^n)$,则存在唯一的测地线 $\gamma(t)$,使 $\gamma(0)=P$, $\dot{\gamma}(0)=\boldsymbol{a}$.

推论 在某一点互相切触的两条测地线互相重合.

我们考察黎曼流形 M^n 和黎曼联络 ∇. 设 γ 是测地线,$\dot{\gamma}$ 是速度场,$\boldsymbol{T}$ 是沿 γ 的平行向量场. 则在每一点 $\gamma(t)$,可以确定数 $\cos\alpha(t)=\langle\boldsymbol{T},\dot{\gamma}\rangle/|\boldsymbol{T}|\cdot|\dot{\gamma}|$,这里 $\alpha(t)$ 是向量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\dot{\gamma}$ 之间的角.

引理 1 在向量 $\boldsymbol{T}$ 沿测地线 γ 平行移动时,角 α 保持不变,即 $\alpha(t)\equiv$常数.

证明 由定理 1,向量的数量积和长度保持不变. 引理证毕.

在二维的情况下,保持角度唯一地给出沿测地线的平行移动. 设 γ 是测地线,并且 $\boldsymbol{a}\in T_P(M^2)$(图 5.12);这时,平行场 $\boldsymbol{T}(t)$,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{T}(0)$ 有同样的长,并且 $\boldsymbol{T}(t)$ 与向量 $\dot{\gamma}(t)$ 构成同一个角 α,等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\dot{\gamma}(0)$ 构成的角. 现在,可以定义沿任意的逐段光滑曲线 γ 的平行移动. 用小测地线段组成的测地折线来逼近 γ,然后,沿每一测地线段,利用角的不变性质来实现平移,再后,取测地线段长度趋向于 0 时的极限. 在沿着不是测地线的轨线平行移动时,移动的向量与轨线的速度向量所构成的角,一般地说,是变化的. 现在考察例子.

(1) 如果 $M^2=\mathbf{R}^2$,那么沿曲线的平行移动与通常的平移一致:平行场关于笛卡儿坐标有不变的分量.

(2) 设 M^2 是 $\mathbf{R}^3$ 中的直圆锥,顶角等于 θ(参看图 5.13)"挖掉"它的顶点. 设 $\gamma(t)$ 是垂直于轴的平面与锥面的截线;设 $OP=r,\boldsymbol{a}\in T_P(M^2)$ 向着锥的顶点. 使此向量沿着 $\gamma(t)$ 平行移动;并返回 P 点. 向量转动了怎样的角? 我们利用与在锥面上诱导度量一致的联络. 因为这个度量是欧氏的,所以锥面沿着它的母线剪开时可以展为平面. 找出在 $\mathbf{R}^2$ 上 $\boldsymbol{a}$ 沿着圆周(参看图 5.14)平行移动时所转的角就够了. 容易算出转角 φ 等于 $2\pi\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$. 我们从平行移动的观点来指出 Christoffel 符号(系数)的几何意义. 求出 $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$,这里 ∂_α 和 ∂_β 是 M^n 上在坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 下的坐标向量场. 张量 $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$ 仍是向量场.

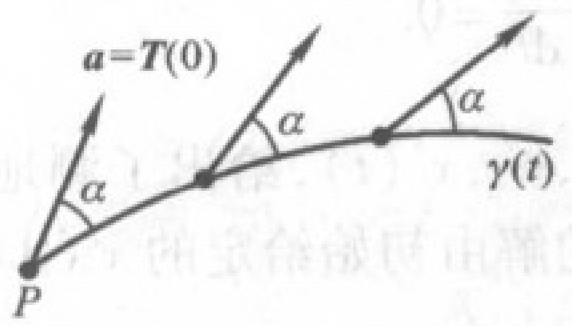


图 5.12

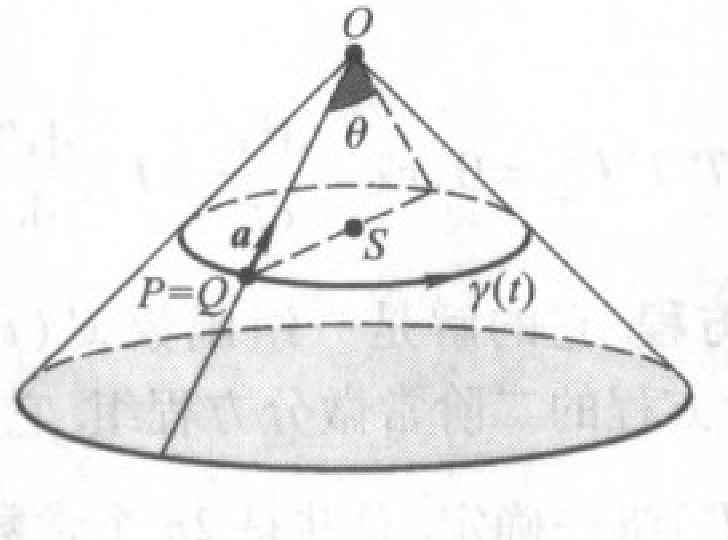


图 5.13

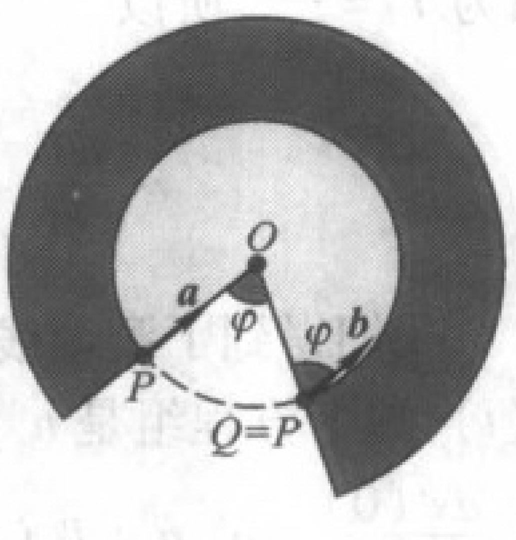


图 5.14

引理 2　存在恒等式 $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)=\Gamma^k_{\alpha\beta}\partial_k$.

证明　我们有

$$[\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)]^k=a^q_\alpha\nabla_q(T^k_\beta),$$

其中

$$\partial_\alpha=\{a^q_\alpha=\delta^q_\alpha\};\partial_\beta=\{T^k_\beta=\delta^k_\beta\};$$

$$a^q_\alpha\nabla_q(T^k_\beta)=a^q_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^q}T^k_\beta+T^\omega_\beta\Gamma^k_{\omega q}\right)=\delta^q_\alpha\delta^\omega_\beta\Gamma^k_{\omega q}=\Gamma^k_{\beta\alpha};$$

即

$$\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)=\Gamma^k_{\beta\alpha}\partial_k.$$

引理证毕.

这个结论可以这样理解:在 ∂_α 方向上将 ∂_β 作无穷小平移;同时,∂_β 好像"转动",并且它按 $\partial_1,\cdots,\partial_n$ 分解的系数正好等于 $\Gamma^k_{\beta\alpha}$.

(3) 设 $M^n=\mathbf{R}^n$,建立笛卡儿坐标 $x^1,\cdots,x^n$;这时 $\Gamma^i_{jk}\equiv0$. 测地线方程为

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}\equiv 0, 即 x^\alpha=a^\alpha t+b^\alpha.$$

于是测地线是直线,并且只有直线才是测地线.

(4) 设 $M^2=S^2$,具有标准的度量在球面坐标中,

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2.$$

我们求测地线. 直接计算有(验证!):$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\sin 2\theta$;$\Gamma^2_{12}=\cot\theta$;对其他的指标$(i,j,k)$有 $\Gamma^i_{jk}=0$. 其中 $x^1=\theta, x^2=\varphi, g_{11}=1, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=\sin^2\theta$. 由此,测地线方程为$\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=0, \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\cot\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0$. 其中有一个解为形式:$\varphi=$常数,$\theta=t$. 此解经过北极的子午线,此子午线是属于参数 $\theta=t$(弧长)的曲线.

命题 2 设 S^2 具有标准的度量. 那么,球的所有(过球心)平面截线(赤道),是黎曼联络的测地线,并且只有球的平面(过球心)截线才是黎曼联络的测地线.

证明 首先证明 S^2 的任何过球心的平面截线都是测地线(关于自然的参数). 对子午线 γ_0,这个事实已在上面证明. 我们考察任意的"赤道"γ. 显然存在旋转,使 γ 转到 γ_0 的位置.

引理 3 设 $f:M^n\to M^n$ 是黎曼流形 M^n 的等长;γ 是黎曼联络的测地线;那么在等长 f 下,γ 的像也是测地线.

证明 等长保持黎曼联络不变,所以也保持测地线方程,即 f 把方程组的解仍变成方程组的解,这就是所要求的. 引理证毕.

回到命题 2 的证明上来,我们得到 γ 是测地线,反之:设 γ 是 S^2 上的测地线. 考察 γ 上任意点上的速度向量 $\dot\gamma$,并过此点在向量的方向上作一赤道(过 S^2 上任何一点,在任何方向上可作一个且仅可作一个赤道)(参看图 5.15). 因为 γ 和赤道是同一个方程组的解,并且这两个解相切触,所以它们重合. 命题证毕.

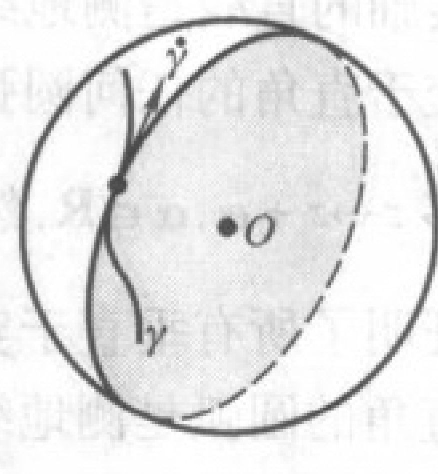


图 5.15

(5) 设 $M^2=L_2$ 是建立了标准度量 $ds^2=dx^2+\operatorname{sh}^2 x d\varphi^2$ 的 Лобачевский 平面. 考察具有度量 $(1-r^2)^{-2}(dr^2+r^2d\varphi^2)$ 的 Poincaré 模型,求测地线.

命题 3 Poincaré 模型中 Лобачевский 平面的测地线是所有的与绝对形交于直角的圆弧(特别,所有的直径),并且仅有这些是它的测地线.

求出测地线方程. 因为 L_2 的度量是 S^2 的度量中的三角函数由双曲函数所代替而得,所以,$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\chi)$;$\Gamma^2_{12}=\operatorname{cth}\chi$;对其他的指标$(i,j,k)$有 $\Gamma^i_{jk}=0$;

其中 $x^1=\chi, x^2=\varphi$. 由此得$\frac{d^2\chi}{dt^2}-\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2\chi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=0, \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mathrm{cth}\chi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\chi}{dt}=0$. 其中一个解为：$\varphi=\mathrm{cost}, \chi=t$，它是平面上过 O 点的直线. 因为(χ,φ)同时也可"取作"双曲面右叶（虚半径的伪球面）的坐标，所以在球极射影时，具有方程 $\varphi=\varphi_0, \chi=t$ 的"直线"变为单位圆的一条直径. 从而证明了 Poincaré 模型上一条直径 γ_0 是测地线.

我们证明垂直于绝对形任何圆弧是测地线. 利用引理 3，应该证明上面所指出的任何圆周经等长变换可以变为 γ_0. 为此，我们转到具有度量$\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$的上半平面上的模型上来. 注意到存在线性分式变换（等长），它把单位圆变为上半平面，同时，圆的边界变为实轴，直径 γ_0 变为垂直于实轴的直线（图 5.16）. 可以认为上

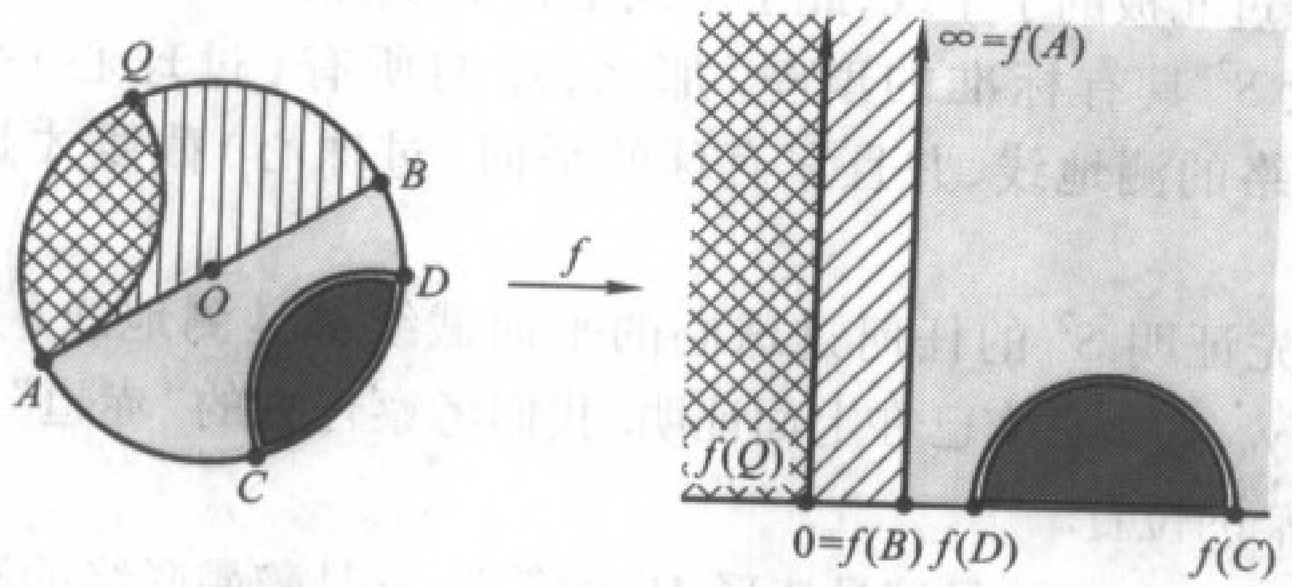


图 5.16

半平面上的轴 OY 是测地线，因为它是直径 γ_0 在等长变换下的像. 于是任何垂直于实轴的直线是测地线，因为位移 $z\to z+\alpha, \alpha\in\mathbf{R}$ 是等长. 由此得到，任何与 OX 轴相交于直角的任何圆弧是测地线，因为用线性分式变换可以把它变为轴 OY：先作位移 $z\to z+\alpha, \alpha\in\mathbf{R}$，然后再作变换 $z\to\frac{-z}{z-a}, a\in\mathbf{R}$. 于是证明了所有垂直于实轴的直线以及所有与轴 OX 交于直角的圆弧是测地线. 现在，设 γ 是任意的测地线. 应该证明它与所描述的测地线重合. 在 γ 上取点 P，并考察向量 $\dot{\gamma}$. 过 P 点作圆弧，使它与绝对形交于直角，并且有同一个速度向量（参看图 5.17）. 像我们已经知道的一样，γ 与这个弧重合. 命题证毕.

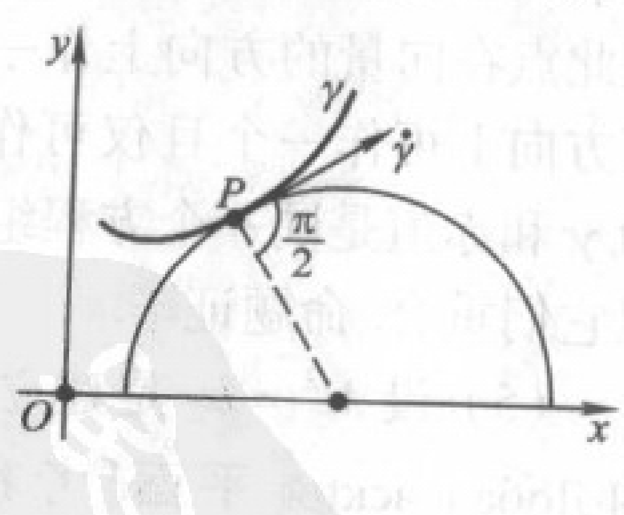


图 5.17

作为应用，我们考察向量在 Лобачевский 平面上沿平行于 OX 轴的直线是如何平行移动的. 这个直线不是测地线. 我们用测地折线来逼近 γ（参看图 5.18）. $\boldsymbol{a}$ 的平行移动的定性图在图 5.19 中表明，移动的向量绕自己的始点旋转.

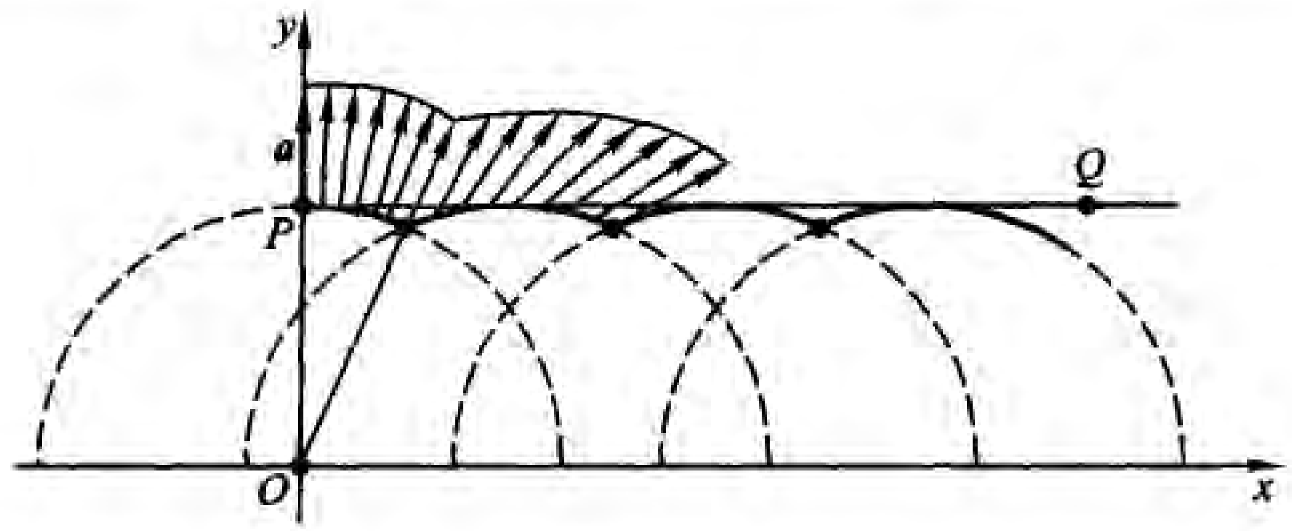


图 5.18

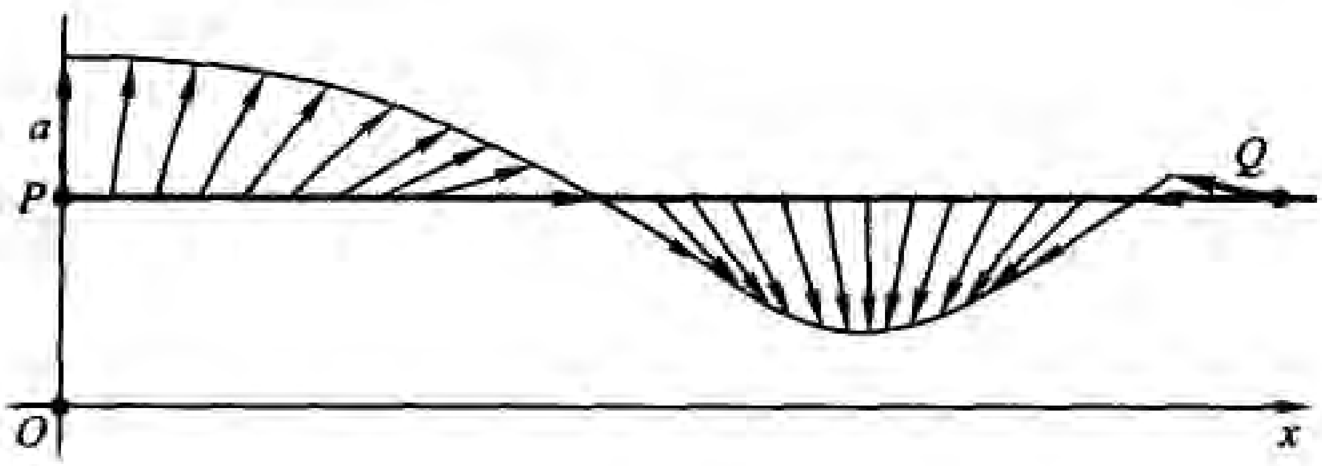


图 5.19

注意 Лобачевский 平面上的测地线可以用对测地线方程积分而求得. 在上半平面进行是方便的. Christoffel 符号(验算!):$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{y}$;$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{y}$;$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{y}$;其他的等于0. 测地线方程为$\ddot{x}=\frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}$,$\ddot{y}=\frac{\dot{y}^2-\dot{x}^2}{y}$. 由此得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=-\frac{1}{y}(y'^2_x+1);$$

$$yy''=+y'^2=-1;(yy')'=-1;$$

$$yy'=-x+C;\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+Cx+\frac{D}{2};$$

$$(x-C)^2+y^2=C^2+D.$$

若$\dot{x}=0$,则它给出直线,此直线垂直于实轴. 若$\dot{x}\neq 0$,则得到的是圆,此圆与绝对形正交.

指出在 S^2 上实行向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 S^2 的平面(不过中心)截线平行移动(参看图5.20).

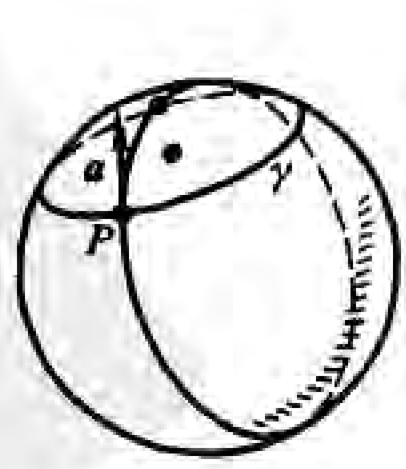


图 5.20

(6) 设 $M^2=T^2$ 是二维的环,具有局部欧氏度量,在圆周 $S^1(\varphi)$ 和 $S^1(\psi)$ 上的角为 φ 和 ψ;它们是环上的坐标,在此坐标下,度量采取形式 $d\varphi^2+d\psi^2$. 在 T^2 按公式 $f(\varphi,\psi)\to(e^{i\varphi},e^{i\psi})\in\mathbf{C}^2$ 嵌入 $\mathbf{R}^4\cong\mathbf{C}^2$ 时,上面的度量表示从 $\mathbf{R}^4$ 中诱导的欧

氏度量. 因为 $ds(R^4)=dzd\bar{z}+dwd\bar{w}$,所以 $ds^2(T^2)=d\varphi^2+d\psi^2$.

由于在欧氏度量中 $\Gamma^i_{jk}=0$,因此在环上的测地线是在作商空间 $h:\mathbf{R}^2(\varphi,\psi)\to T^2(\varphi,\psi)$,$h(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)\bmod 2\pi$,即 $T^2=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}$(参看图 5.21)时,平面 $\mathbf{R}^2(\varphi,\psi)$上直线的像(图 5.21). 在环上再没有其他的测地线了. 测地线分为两类:封闭的和非封闭的. 环上的测地线用画出格子($\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}=(2\pi m,2\pi n),m,n\in\mathbf{Z}$)的 $\mathbf{R}^2(\varphi,\psi)$上的直线来描述是方便的. 考察过 O 点的直线束. 显然,在环上通过相对应的测地线是封闭的充要条件是对应它的直线像交于任何的"整"点$(2\pi m,2\pi n)$. 否则,测地线是非封闭的(同胚于直线)充要条件是相应的直线除点$(0,0)$外不包含"整"点. 我们用直线与 OX 轴交角的正切来表达:当且仅当 $\tan\alpha$(参看图 5.22)是有理数时为封闭的测地线(同胚于圆);于是,若 $\tan\alpha$ 是无理数时为非封闭的测地线. 在图 5.22 中表示的直线,它通过点$(2\pi\cdot 3,2\pi\cdot 2)$;作商空间后,在正方形 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$ 中得到一直线段(参看图 5.23). 图 5.23 表示了在环上相对应的测地线(圆周). 若正切是无理数,则测地线为环上"无尽的线圈",即它的闭包是整个环.

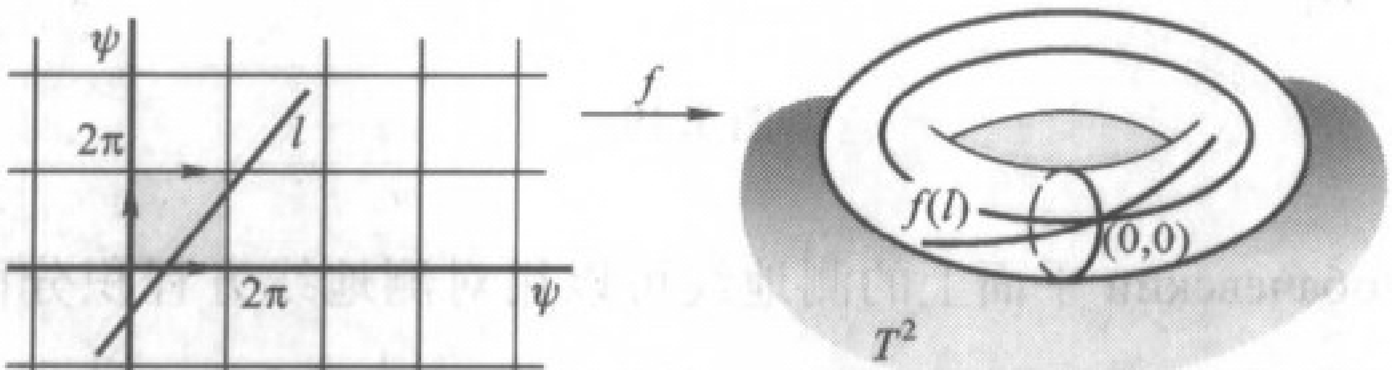


图 5.21

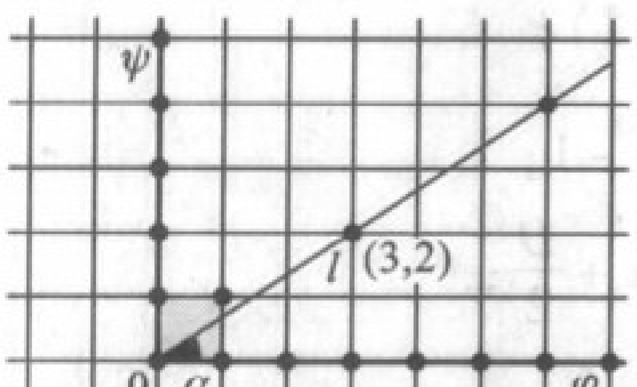


图 5.22

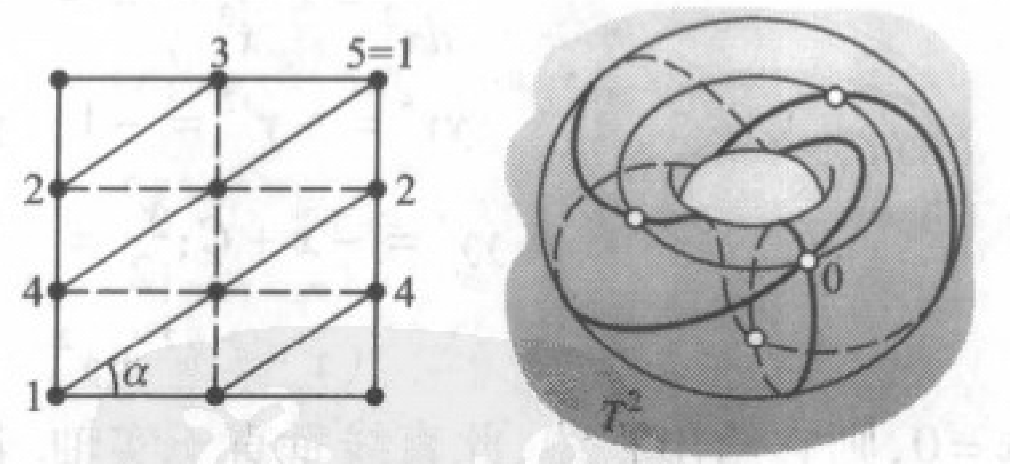


图 5.23

我们叙述测地线一些应用.

定理 2 设 M^2 是下列三个流形之一:(a) 平面 $\mathbf{R}^2$;(b) S^2;(c) Лобачевский 平面 L_2;它们都配置了标准度量. 设 $G=\mathrm{Iso}(M^2)$是 M^2 上的所有等长的群,则每一个变换 $g\in G$ 都由三个连续的参数决定,即 $\dim G=3$.

G 为完全的等长群,即保持度量的微分同胚的群. 群 $G=\mathrm{Iso}(M^n)$对任何光滑的

黎曼流形定义；它是拓扑空间：如果两个变换 g_1, g_2，作为 M^n 的微分同胚是邻近的，即对所有的点 $x \in M^n$，$g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是邻近的点，则认为两个变换 g_1, g_2 是邻近的.

定理 2 可从一般的论断中得到，我们证明此论断的特殊情形.

设 M^n 是紧致光滑连通的黎曼闭流形，$G = \mathrm{Iso}(M^n)$；那么，$\dim G \leq \frac{n(n+1)}{2}$，即每一个变换 $g \in G$ 都由不多于 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个连续参数决定.

我们仅对所指的三种流形证明此定理，虽然大多数的论证对任意的流形是正确的.

证明 设 $x_0 \in M^n$，$H(x_0) \subset G$ 是保持 x_0 不变的等长的集合. 显然，$H(x_0)$ 是子群，称为点 x_0 的**安定子群**. 设 $h \in H(x_0)$. 因为 $h(x_0) = x_0$，所以 $dh(x_0): T_{x_0}(M^n) \to T_{x_0}(M^n)$. 假设 $\lambda(h) = dh(x_0)$，作映射 $\lambda: H(x_0) \to GL(n;\mathbf{R})$. 因为 h 是微分同胚，显然 $dh \in GL(n;\mathbf{R})$. 其次，λ 把 $H(x_0)$ 映入子群 $O(n) \subset GL(n,\mathbf{R})$ 中. 事实上，可以认为在 x 的邻域中选取坐标使 $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$；这时 $g_{ij}(x_0)$ 在 $T_{x_0}(M^n)$ 中定义了欧氏度量. 因为 h 是等长，所以 $dh(x_0)$ 在 $T_{x_0}(M^n)$ 中保持欧氏数量积. 还有：λ 是 $H(x_0)$ 到 $O(n)$ 的同态. 事实上，$\lambda(h_1 \circ h_2) = d(h_1 \circ h_2)(x_0) = dh_1(x_0) \circ dh_2(x_0)$. 不仅如此，$\lambda$ 还是单射，事实上，我们假定 $dh = E$（恒等）；立即可证 $h(x) = x, x \in M^n$. 利用 $M^n = M^2$——流形 $S^2, \mathbf{R}^2, L_2$ 中之一. 其中每一个流形上任意一对点可用测地线连接. 在平面上和球面上结论是显然的，若 $M^2 = L_2$，那么考察上半平面；则可如图 5.24所指出的方法作出所求的测地线.

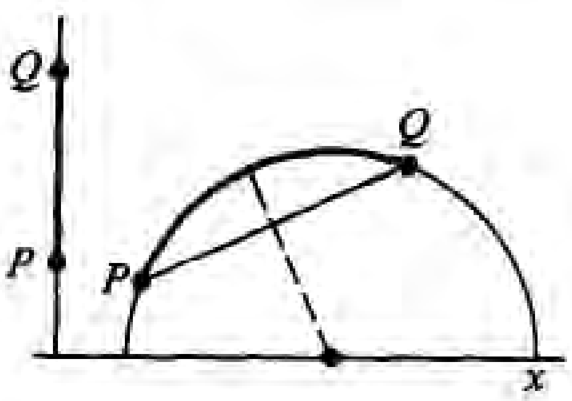


图 5.24

于是，设 $dh(x_0) = E$；我们把任意点 $x \in M^n$ 用测地线 $\gamma(t)$ 与 x_0 连接起来，设 $\dot\gamma(0)$ 是 $\gamma(t)$ 在 x_0 的速度向量. 因为 h 是等长，所以 γ 在 h 下的像也是测地线，而因为 $dh(x_0) = E$，所以测地线 $\gamma_1 = h(\gamma)$ 在 x_0 有与 γ 相同的速度向量. 两个相切触的测地线是重合的. 因 γ 可以用自然参数，所以 γ 上的每一点的参数在 h 下都不变，因此 x 在 γ 上保持前面所指的到 x_0 的距离，即 $h(x) = x$，这就是所要求的. 于是 $H(x_0)$ 是 $O(n)$ 的闭子群. $H(x_0)$ 是闭的，这是由于保持 x_0 不变的等长的极限是等长，它本身也保持 x_0 不变. 于是，对 $M^2 = S^2, \mathbf{R}^2, L_2$，我们有 $\dim H(x_0) \leq \dim O(2) = 1$. 对一般的 M^n，可以证明 $\dim H(x_0) \leq \dim O(n)$，即 $\dim H(x_0) \leq n(n-1)/2$. 现在考察群 G.

命题 4 任何等长 $g \in G$，决定于点 x_0 的像 $g(x_0)$，和微分 $dg(x_0): T_{x_0}(M^n) \to T_{g(x_0)}(M^n)$.

事实上，我们考察对应：$g \to (g(x_0); dg(x_0))$，并设 $(g_1(x_0); dg_1(x_0)) = (g_2(x_0); dg_2(x_0))$. 由此得到 $g_1(x_0) = g_2(x_0)$，$dg_1(x_0) = dg_2(x_0)$；这时我们考虑

$g(x)=(g_1^{-1})\circ g_2(x)$. 显然,$g\in H(x_0)$. 其次,有

$$dg(x_0)=((dg_1)^{-1}\circ(dg_2))(x_0)=E.$$

由此,在 M^n 上 $g\equiv E$,即 $g_1(x)\equiv g_2(x)$. 因为 $g(x_0)$ 决定于 n 个参数,而 $dg(x_0)$ 由不大于 $n(n-1)/2$ 个参数给出,所以 g 可以由不大于 $=n(n+1)/2$ 个参数给出. 对 $M^2=S^2,\mathbf{R}^2,L_2$,我们有:$\dim G\leqslant 3$. 另一方面,如在第四章中所证明的,群 $\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^2)$,$\mathrm{Iso}(S^2)$,$\mathrm{Iso}(L_2)$ 中每一个群都包含由三个参数给出的子群. 因为这些子群既开又闭,所以对 $M^2=S^2,\mathbf{R}^2,L_2$,我们有 $\dim\mathrm{Iso}(M^2)=3$. 定理证毕.

推论 设 $\mathrm{Iso}(M^n)_0$ 是 $\mathrm{Iso}(M^n)$ 的单位连通分支;那么,对 $M^2=S^2,\mathbf{R}^2,L_2$,$\mathrm{Iso}(M^2)_0$ 与第四章中所作出的那些三维群重合;即 $\mathrm{Iso}(S^2)_0=SO(3)$;$\mathrm{Iso}(L_2)_0=SL(2;\mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$;$\mathrm{Iso}(\mathbf{R}^2)_0$ 与保持平面定向的平面上所有线性等长的群重合.

我们叙述下面的引理,不给予证明.

引理 4 对黎曼流形 M 上每一点 P_0,存在邻域 U 和数 $\varepsilon>0$,使得(a)U 中任何两点有且仅有一条长度小于 ε 的测地线联结它们;(b)这个测地线光滑地依赖于它的端点,并全部属于这个邻域.

由此即可推出下面的事实.

定理 3 任何二维光滑紧致连通闭流形可三角剖分.

证明 在 M^2 上配置黎曼度量(例如,把 M^2 嵌入到欧氏空间). 因为 M^2 是紧致的和闭的,所以用有限个小圆盘覆盖它. 由于引理 4,可以认为每个小圆盘中任何一对点可以用长度不超过 ε 的唯一的测地线连接. 在 M^2 上取足够密的点网 $\{P_i\}$,使可能用测地线连接的点落入任何一个覆盖的圆盘中,并且测地线分每个圆盘为三角形,这些三角形满足三角剖分的要求. 定理证毕.

5.5 曲率张量

5.5.1 预先的观察

考察 M^n(不必须是黎曼流形),具有对称的仿射联络 ∇. 已经知道,联络确定了平行移动,如何计算联络与欧氏空间的偏差? 如何得知是否存在局部欧氏的坐标? 换句话说,如何评价流形的"扭歪"? 如果联络允许欧氏坐标,那么在此坐标下可用通常的方法进行张量的微分,因为共变微分与通常的偏导数一致. 从分析中知道,偏导数的重要性质是可交换的. 因此,在欧氏坐标中,$\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k=0$. 如果 M^n 是任意的流形,那么这个微分算子,一般说,不为 0. 也就是说,它很好地测量了流形的"扭歪".

5.5.2 曲率张量的坐标定义

在 M^n 上考察局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$,和算子 $\nabla_k\nabla_l-\nabla_l\nabla_k$,并把它作用于场 $\boldsymbol{T}=$

$\{T^i\}$. 联络∇是对称的,所以

$$\nabla_l T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + T^p \Gamma^i_{pl};$$

$$\nabla_k \nabla_l (T^i) = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} + T^p \frac{\partial \Gamma^i_{pl}}{\partial x^k} + \nabla_l (T^p) \Gamma^i_{pk} - \nabla_p (T^i) \Gamma^p_{kl}$$

$$= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} + T^p \frac{\partial \Gamma^i_{pl}}{\partial x^k} + \frac{\partial T^p}{\partial x^l}\Gamma^i_{pk} + T^q \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\Gamma^p_{kl} - T^q \Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl};$$

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = T^p \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{pl} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{pk} \right] - (\Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk}) \frac{\partial T^i}{\partial x^p}$$
$$+ T^q [\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl} - \Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl} + \Gamma^i_{qp}\Gamma^p_{kl}].$$

因为 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$,所以

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = T^q R^i_{q,kl};$$

其中

$$R^i_{q,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl}.$$

引理 1 函数组 $R^i_{q,kl}$构成 4 阶张量(秩为 4 的张量).

证明 因为$\nabla = \{\nabla_k\}$是张量运算,引理 1 显然成立. 引理证毕.

定义 1 称张量 $R^i_{q,kl}$为给定联络∇的**黎曼曲率张量**.

如果 $M^n = \mathbf{R}^n$,那么这个张量显然等于 0. 注意,如果在某个坐标中 $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$,则此坐标对给定的联络是欧氏的. 由此得到

引理 2 设 M^n 配置了对称仿射联络. 如果这个联络的黎曼曲率张量不为 0(在某一个坐标系中),那么在 M^n 中不能引进局部欧氏坐标.

假如这样的坐标找到了,那么在此坐标中就取消了 Γ^i_{jk},因此曲率张量也化为 0.

5.5.3 曲率张量的不变的定义

设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 是 M^n 上任意的光滑向量场(M^n 具有对称的仿射联络). 我们作出"曲率算子"R,它使三个向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 与新的向量场相对应. 把场解释为线性微分算子是方便的;这种情况将表明:我们简单地把 $\boldsymbol{X}$ 写为 X.

定义 2 假设 $R(X,Y)(Z) = \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)$. 于是 R 把 $T_x \times T_x \times T_x$ 变换成 $T_x, x \in M^n$.

定理 1 映射 R 是三重线性的,所以它给出了 4 阶张量.

证明 如果考察场的线性组合(带有常系数),那么三重线性性是显然的. 需要证明能够把光滑函数$f(x)$提到运算符号 R 的外面来. 要证明的是 $R(X,Y)\cdot(fZ) = f\cdot R(X,Y)Z$. 我们有

$$\nabla_X \nabla_Y(fZ) - \nabla_Y \nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)$$

$$= \nabla_X((\nabla_Y f)Z) + \nabla_X(f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((\nabla_X f)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z$$

$$= (\nabla_X \nabla_Y f)Z + (\nabla_Y f)\nabla_X Z + (\nabla_X f)\nabla_Y Z + f(\nabla_X \nabla_Y Z)$$
$$- (\nabla_Y \nabla_X f)Z - (\nabla_X f)\nabla_Y Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f(\nabla_Y \nabla_X Z)$$
$$- (\nabla_{[X,Y]}f)Z - f(\nabla_{[X,Y]}Z) = \{(X(Yf) - Y(Xf) - (XY-YX)f\}Z$$
$$+ f\{\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\}$$
$$= 0 + fR(X,Y)Z,$$

其中用到了$\nabla_X f = X(f)$. 还要求核对:$R(fX,Y)Z = f\cdot R(X,Y)Z$. 我们有

$$R(fX,Y)Z = \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z.$$

很明显,$\nabla_{fX} = f\nabla_X$. 其次

$$[fX,Y] = f(XY) - Y(fX)$$
$$= f[X,Y] - (Yf)X.$$

由此得到

$$R(fX,Y)Z = f(\nabla_X \nabla_Y Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]}Z + \nabla_{(Yf)X}Z$$
$$= f(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - f(\nabla_Y \nabla_X Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z$$
$$+ (Yf)\nabla_X Z = f\cdot R(X,Y)Z$$

这就是所要证明的. 关系式$R(X,fY)Z = f\cdot R(X,Y)Z$可类似地验证. 定理证毕.

我们把曲率张量的不变的定义与它的坐标的定义联系起来. 引进基场∂_i(作为微分算子). 这时,$X = X^i\partial_i$; $Y = Y^j\partial_j$; $Z = Z^k\partial_k$. 我们得到$R(X,Y)Z = X^iY^jZ^k\cdot\{R(\partial_i,\partial_j)\partial_k\}$. 其次

$$R(\partial_i,\partial_j)Z = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}Z - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}Z - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}Z.$$

显然,$\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$,即$R(\partial_i,\partial_j)Z = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)Z - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}Z$. 因为$[\partial_i,\partial_j]=0$,所以$R(\partial_i,\partial_j)Z = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)Z$. 这就是所要求的.

5.5.4 黎曼曲率张量的代数性质

定理2 对M^n上任意的三个光滑场X,Y,Z,满足恒等式:

(1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$; $R^i_{j,kl} + R^i_{j,lk} = 0$;

即关于变量X,Y反对称.

(2) $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$——Jacobi 恒等式;用坐标表示为:$R^i_{j,kl} + R^i_{k,lj} + R^i_{l,jk} = 0$.

(3) 如果联络∇是黎曼联络则有$\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$对任何场$X,Y,Z,W$成立;其中$\langle,\rangle$是由度量$g_{ij}$产生的数量积;用坐标表示为:$R_{ij,kl} + R_{ji,kl} = 0$,这里$R_{ij,kl} = g_{i\alpha}R^{\alpha}_{j,kl}$.

(4) 若联络∇是黎曼联络,则$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$,即$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$.

证明 (1) 是显然的.

(2) 首先证明，对于对称的联络有：

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. 事实上

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X^i \nabla_i Y - Y^i \nabla_i X$$
$$= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = [X,Y],$$

这是因为 $Y^i X^p \Gamma^k_{ip} = Y^p X^i \Gamma^k_{pi}$；$\Gamma^k_{pi} = \Gamma^k_{ip}$. 如果 X 和 Y 交换，那么可得 $\nabla_X Y = \nabla_Y X$. 由于定理 1，只要在场交换时，验证 Jacobi 恒等式即可. 我们有

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_Z Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y$$
$$+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \equiv 0.$$

(3) 只要证明 $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$ 即可. 再利用 $[X,Y]=0$，这时，$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z,Z\rangle$. 考虑函数 $(Z,Z)=f$，并计算 $X(f) = X(Z,Z) = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$. 其次：

$$YX(f) = 2\nabla_Y \langle \nabla_X Z, Z\rangle = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle.$$

类似地，得到

$$XY(f) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle,$$

显然，我们有：

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle,$$

这就是所要求的.

(4) 考虑图 5.25 中的八面体. 它的四个面画着阴影，并在每一个顶点放上数积. 利用已证明的关系式，容易证明，每一个阴影面顶点上的数积和等于 0.

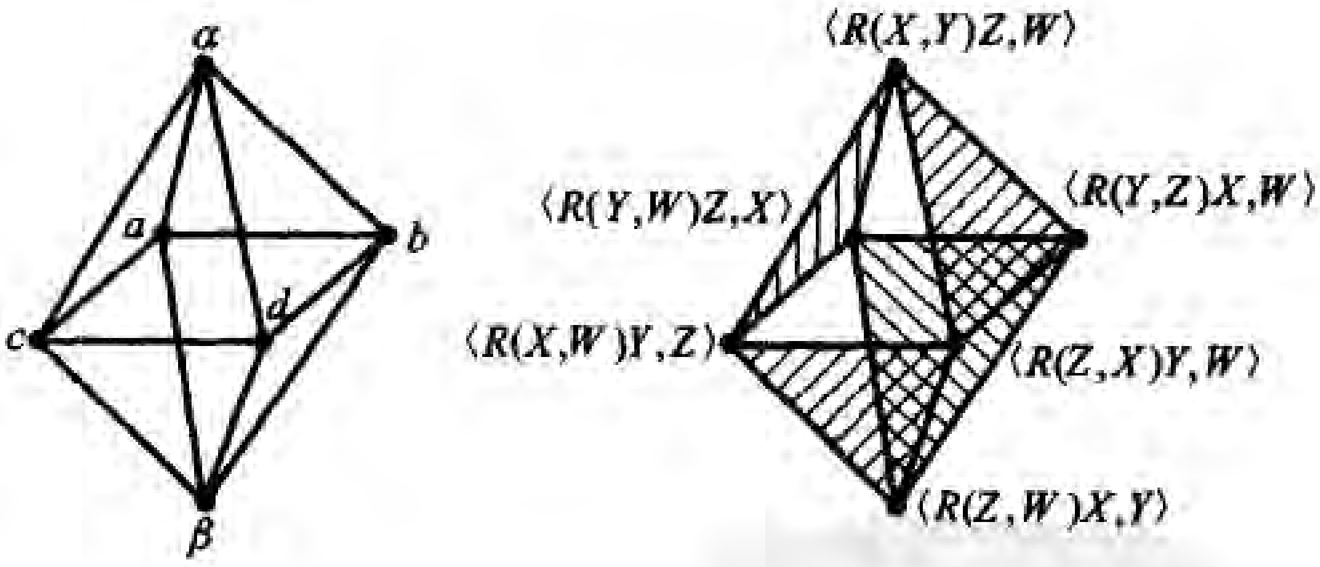


图 5.25

现在写出恒等式 $(a+\alpha+c)+(\alpha+b+d)=0=(a+b+\beta)+(c+d+\beta)$，得到 $2\alpha = 2\beta$，即 $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$，这就是所要求的. 定理证毕.

定义 3 张量 $R_{jl} = R^i_{j,il}$，即黎曼张量（按一对指标）的缩并所得的张量，称为黎曼联络的 Ricci 张量，Ricci 张量是对称的（验证！）.

定义 4 函数 $R(x) = g^{kl} R_{kl}$，即 Ricci 张量与度量的逆张量的缩并，称为黎曼流形的**数量曲率** R.

显然，R_{kl}是 2 阶张量，而 $R(x)$是数量函数. 对许多具体问题来说，知道用 g_{ij}所表示的黎曼张量的是有用的.

定理 3 在黎曼流形上有恒等式

$$R_{iq,kl}=g_{i\alpha}R^{\alpha}_{q,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i\partial x^k}\right)$$
$$+g_{mp}(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il}-\Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}).$$

证明 由黎曼张量的坐标表示式，我们有

$$R^i_{q,kl}=\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}+\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}-\Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl}$$
$$=\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}+\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)\cdot[k,l],$$

其中记号$[k,l]$表示按指标 k 和 l 的交替（不除以 2）①. 于是

$$\theta=g_{si}R^i_{q,kl}=R_{sq,kl}=g_{si}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k}+\Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk}\right)[k,l]$$
$$=g_{si}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{*}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{*}\right)[k,l],$$

其中符号 $*$ 表示一对指标(ql). 圆括号内的表示式可形式地理解为对一组函数 Γ^i_*共变微分∇_k 的结果，其中的记号 $*$ 暂不去管它. 函数组 Γ^i_*不构成张量，但在每个给定的坐标系中也可当作具有分量 Γ^i_*的张量（在另外的坐标系中这个张量将有某些另外的与 $\Gamma^{i'}_*$不同的分量，但对给定坐标系中的微分来讲，这种情况没有多大关系）. 因为 g_{si}对“张量”Γ^i_*发生指标的下降，由于 g_{ij}张量是共变常量，所以在共变微分的符号下也是可以实现的. 由此

$$\theta=g_{si}\nabla_k(\Gamma^i_*)[k,l]=\nabla_k(g_{si}\Gamma^i_*)[k,l]=\nabla_k(\Gamma_{s,*})[k,l],$$

其中

$$\Gamma_{s,*}=\Gamma_{s,ql}=\frac{1}{2}g_{si}g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{\alpha q}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{ql}}{\partial x^\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{sq}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{ql}}{\partial x^s}\right).$$

在原来的 $R_{sq,kl}$的公式中将此表示式代入，得到

$$R_{sq,kl}=\nabla_k(\Gamma_{s,*})[k,l]=\left(\frac{\partial\Gamma_{s,*}}{\partial x^k}-\Gamma_{\alpha,*}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k,l]$$
$$=\left(\frac{\partial\Gamma_{s,ql}}{\partial x^k}-\Gamma_{\alpha,ql}\Gamma^\alpha_{ks}\right)[k,l]$$

① $P_{kl}[k,l]$即表示 $P_{kl}-P_{lk}$.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{sq}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s}\right)[k,l] - g_{\alpha p}\Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}[k,l]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s}\right)$$
$$+ g_{\alpha p}(\Gamma^p_{qk}\Gamma^\alpha_{ls} - \Gamma^p_{ql}\Gamma^\alpha_{ks}).$$

定理证毕.

推论1 如果在黎曼流形上黎曼曲率张量在某个坐标中不为0,那坐标在 M^n 上就不能建立局部欧氏坐标,即不能建立局部坐标,在此局部坐标下,g_{ij}是常数矩阵(或,同样的:$\Gamma^i_{jk}\equiv 0$).

证明 由引理2即可证明.

5.5.5 黎曼曲率张量的某些应用

定理4 在二维光滑黎曼流形上存在恒等式

$R=2K$,这里 R 是数量曲率,K 是 Gauss 曲率.

推论2 因为 R 由给定的 g_{ij}完全确定,所以 K 也仅由 g_{ij}完全确定,特别,M^2 在 $\mathbf{R}^3$ 中的等长变换下(在曲面的弯曲时)K 是不变的.

这个推论非一下子就能证明的,这是由于:在 Gauss 曲率 K 的定义中,参与了第二基本形式;在变形时,一般说,第二基本形式是不保持的.

定理的证明 在 P 的邻域中给曲面 M^2 以图的形式 $z=f(x,y)$,其中(x,y)是 $T_P(M^2)$的笛卡儿坐标. 因为 $T_PM^2=\mathbf{R}^2(x,y)$是切平面,所以有 $\mathrm{grad}f(P)=0$,即 $g_{ij}(P)=(\delta_{ij}+f_{x^i}f_{x^j})(P)=\delta_{ij}$,由此 $\Gamma^i_{jk}(P)=0$,这是因为$(\partial g_{ij}/\partial x^k)|_P=0$(验证!). 由于 $R_{iq,kl}$的代数对称性,现在其中仅有一个实质的分量 $R_{12,12}$,其他的分量或等于0,或仅与 $R_{12,12}$差一符号,或与 $R_{12,12}$相等. 在坐标系(x,y)中写出黎曼张量,由定理3,我们有

$$R_{12,12} = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}[2(f_x f_y)_{xy} - (f_y^2)_{xx} - (f_x^2)_{yy}]$$
$$= (f_{xx}f_y + f_x f_{xy})_y - (f_y f_{xy})_x - (f_x f_{xy})_y$$
$$= \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix} = K.$$

由此,$R_{12,12}=K$. 我们来计算 R.

$$R = g^{kl}R_{kl} = g^{kl}R^\alpha_{k,\alpha l} = g^{kl}g^{\alpha q}R_{qk,\alpha l} = R_{12,12}(\sum \pm g^{kl}g^{\alpha q}),$$

其中

$$\sum \pm g^{kl}g^{\alpha q} = g^{22}g^{11} - g^{21}g^{21} + g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12}$$
$$= 2(g^{22}g^{11} - (g^{12})^2) = 2\det(g_{ij})^{-1} = \frac{2}{g},$$

$$g=\det(g_{ij}).$$

于是，$R=\frac{2}{g}R_{12,12}$. 由此，$R=2K$，因为 $g_{ij}(P)=\delta_{ij}$. 但由于 R 和 K 都是数量，所以它们的值不依赖于坐标的选择，因此在任何坐标系中都有 $R=2K$. 定理证毕.

例　(1) 对欧氏度量 dx^2+dy^2，$R=2K=0$，即曲率等于 0.

(2) 对球面度量 $dr^2+\left(\sin^2\frac{r}{r_0}\right)d\varphi^2$，$R=2K=\frac{2}{r_0^2}$，即曲率是常数，且是正的.

(3) 对 Лобачевский 平面度量 $dr^2+\left(\mathrm{sh}^2\frac{r}{r_0}\right)^2d\varphi^2$，我们有 $R=2K=\frac{-2}{r_0^2}$，即曲率是常数，且是负的.

(4) 对共形于欧氏的度量 $\lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$，其中 $\lambda(x,y)$ 是正的函数，我们有 $R=2K=-\frac{1}{\lambda}\Delta\ln\lambda$，这里的 Δ 是 Laplace 算子. 直接计算即可证明.

在三维的情形下黎曼张量已经较复杂了，实质分量有较大的数目(共有 6 个)：$R_{12,13}$；$R_{21,23}$；$R_{31,32}$；$R_{12,12}$；$R_{13,13}$；$R_{23,23}$；其他的分量 $R_{ij,kl}$ 或是等于 0，或与上面所指出的相等，或差一个符号.

可以算出，黎曼张量的实质分量的数目，对 M^n 来讲，是 $N=\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ 个，当 $n\to\infty$ 时，N 与一般的分量个数(n^4)之比趋向于 1/12.

在几何中，“二维方向的曲率”起很大的作用. 我们考虑黎曼空间 M^n；设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in T_PM^n$. 并设由此两个向量构成的平行四边形的面积 $\Pi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 在度量 g_{ij} 下等于 1. 对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 决定的二维方向 σ，若 X,Y 是 P 的邻域中的任意向量场，且有 $X(P)=\boldsymbol{X}$，$Y(P)=\boldsymbol{Y}$，即场在 P 点的与所选的向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 重合，称数 $R(\sigma)=\langle R(X,Y)X,Y\rangle$ 为 M^n 在二维方向 σ 上的曲率.

引理 3　存在公式 $R(\sigma)=R_{\beta j,kl}X^jX^kY^lY^\beta$，其中 X^α,Y^β 是向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的坐标，并且 $R(\sigma)$ 与 X,Y 包含 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 的方式无关.

证明　我们有：

$$\begin{aligned}R(\sigma)&=g_{\alpha\beta}Y^\beta[R(X,Y)Y]^\alpha\\&=g_{\alpha\beta}Y^\beta R^\alpha_{j,kl}X^jX^kY^l=R_{\beta j,kl}X^jX^kY^lY^\beta.\end{aligned}$$

引理证毕.

定义 5　黎曼流形 M^n，如果它按所有二维方向的曲率是正的(负的，0，常数等)，则称 M^n 为**正(负，零，常等)曲率流形**.

引理 4　考察黎曼流形 M^2，并设 $K(P)$ 是 Gauss 曲率，$R(P)$ 是数量曲率，$R(\sigma)$ 是在点 $P\in M^2$ 的二维方向 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\sigma$ 的曲率. 这时

$$R(\sigma)=K(P)=\frac{1}{2}R(P).$$

证明　考察坐标 (x,y)，它的坐标线在 P 点互相垂直；在 $T_P(M^2)$ 中的诱导度

量中，数量积可以认为是欧氏的. 这时

$$R(\sigma)=R_{\beta j,kl}X^jX^kY^\beta Y^l=R_{12,12}(X^2X^2Y^1Y^1-X^2X^1Y^2Y^1+X^1X^1Y^2Y^2-X^1X^2Y^1Y^2)=R_{12,12}(X^2Y^1-Y^2X^1)^2=R_{12,12}\cdot 1=R_{12,12},$$

这是因为 $X^2Y^1-Y^2X^1=$（平行四边形 $\Pi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的面积）. 因为

$R_{12,12}=K(P)$，所以 $R(\sigma)=K(P)$，这就是所要求的. 引理证毕.

第六章　同调论

到现在为止，我们大体上研究了光滑流形的局部性质，即可以在流形 M 的每一点 P 的邻域中互相独立地确定和计算的那些性质；并且因此这些性质与 M 表示为图的并是无关的. 但在许多问题中，仅知道 M 的局部性质是不够的.

考察下面的问题作为例子. 设 $M = S^1$ 是圆周，在其上取角参数 φ 作为其局部坐标. 考虑这样的问题：求 S^1 上的光滑函数 f，使它满足恒等式

$$\frac{df}{d\varphi} = g(\varphi), \tag{6.1}$$

其中 g 是 S^1 上的光滑函数. 如果在具有坐标 φ_0 的点 P 的小邻域中来解这个问题，那么 g 的任何原函数 $f(\varphi) = \int g(\varphi)d\varphi$ 将是它的解. 但总体来说，在 S^1 上的解却不是经常存在的. 事实上，任何 S^1 上的光滑函数能与一个实变量的以 2π 为周期的周期函数相一致. 如果 $f(\varphi) = \int g(\varphi)d\varphi$，并且函数 f 是周期函数，那么函数 f 就是我们问题的解. 函数 g 的所有的原函数表示为定积分 $f(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} g(\varphi)d\varphi + C$. 因此，函数 f 的周期性的条件可写为 $\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} g(\varphi)d\varphi = 0$，或写为

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi = 0. \tag{6.2}$$

例如，若 $g(\varphi) \equiv 1$，则 $\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi = 2\pi \neq 0$. 因此，在 $g(\varphi) \equiv 1$ 的条件下，问题 (6.1) 在 S^1 上没有解. 条件 (6.2) 是对问题 (6.1) 存在解的必要和充分条件. 从考察的问题看出，解的存在实际上是依赖于流形的整体结构. 在本章中就是研究流形

的这样的性质,由这些性质决定了在整个流形上的任何一个函数和映射的状况.

6.1 外微分形式的演算 上同调

6.1.1 外微分形式的微分

对于外微分形式,微分的演算比任何张量场的微分演算略微简单些. 如果在流形上建立了某个联络,那么反对称张量场的共变梯度一般不是反对称张量场. 因此,很自然地把外微分形式的梯度定义为共变梯度与按张量场的所有指标交错的合成. 同时,若联络是对称的,则在外微分形式梯度的公式中一般不含 Christoffel 符号,即外微分形式梯度的定义不依赖于流形上对称联络的选择.

定义 1 外微分形式 $d\omega$,若在局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中其分量为

$$(d\omega)_{j_1\cdots j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\frac{\partial\omega_{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}} \tag{6.3}$$

时,则称 $d\omega$ 为**外微分形式 ω 的梯度**.

定理 1 外微分形式的梯度满足下列条件:

(1) $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{\deg\omega_1}\omega_1\wedge d\omega_2$;(2) $d(d\omega)=0$.

证明 设$(x^1,\cdots,x^n)$是局部坐标系,ω_1,ω_2 分别为 p 阶和 q 阶的两个外微分形式. 任何微分形式 ω 的分量仅当它的指标组$(i_1,\cdots,i_p)$中两两指标取不同时,不等于0. 这就是说,为确定形式 ω 的分量,只要考虑其指标组中的指标两两不同,并且按增加的顺序排列的分量就可以了. 这样的指标组对应于子集 $I\subset[1,n]$,这是1到 n 的所有整数中的一段. ω 的相应的分量将表示为 ω_I. 在这样的表示下,乘积的形式和微分形式的微分采取较简单的形式:

$$(\omega_1\wedge\omega_2)_K=\sum_{I\cup J=K}(-1)^{|\sigma(I,J)|}\omega_{1,I}\omega_{2,J} \tag{6.4}$$

$$(d\omega)_K=\sum_{\{i\}\cup J=K}(-1)^{|\sigma(i,J)|}\cdot\frac{\partial\omega_J}{\partial x^i} \tag{6.5}$$

这里的求和是按照将 K 分为所有的子集 $I\cup J=K$ 进行,其中 I 和 J 相应地由 p 和 q 个元素组成,而 $\sigma(I,J)$是这样的置换,其前面 p 个位置的集合 I 中保持其顺序. 在第二个公式中,所有符号的意义是类似的,其不同为集合 I 由一个指标 i 组成. 应用公式(6.5)于(6.4),得到:

$$(d(\omega_1\wedge\omega_2))_K=\sum_{K=I\cup J\cup\{i\}}(-1)^{|\sigma(I,J,i)|}\frac{\partial(\omega_{1,I}\cdot\omega_{2,J})}{\partial x^i}.$$

在最后的和式中,求和是对集合 K 为三个不相交子集$\{i\}$,I,J 的所有可能的分法进行的,而 $\sigma(i,I,J)$是置换,它使 i 在第一个位置,其次是集合 I 和 J,其中的指标各在 I 和 J 中保持顺序. 于是

$$(d(\omega_1\wedge\omega_2))_K=\sum_{K=\{i\}\cup I\cup J}(-1)^{|\sigma(i,I,J)|}\frac{\partial\omega_{1,I}}{\partial x^i}\omega_{2,J}$$
$$+\sum_{K=\{i\}\cup I\cup J}(-1)^{|\sigma(i,I,J)|}\omega_{1,I}\frac{\partial\omega_{2,J}}{\partial x^i}$$
$$=(d\omega_1\wedge\omega_2)_K+(-1)^{\deg\omega_1}(\omega_1\wedge d\omega_2)_K.$$

性质(2)只要对基形式(任何形式可按基形式进行分解)作出证明即可. 不失一般性,可以认为,在局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中,形式ω为:$\omega=f(x^1,\cdots,x^n)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k$. 我们指出,如果性质(2)对形式$\omega_1$和$\omega_2$满足,那么它对外积$\omega_1\wedge\omega_2$也是正确的. 事实上,

$$dd(\omega_1\wedge\omega_2)=d(d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{\deg\omega_1}\omega_1\wedge d\omega_2)$$
$$=dd\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{\deg(d\omega_1)}d\omega_1\wedge d\omega_2+(-1)^{\deg\omega_1}d\omega_1\wedge d\omega_2$$
$$+(-1)^{2\deg\omega_1}\omega_1\wedge dd\omega_2.$$

首先,按假定第一项及最后一项等于0,而中间是两个带有相反符号的同样项. 于是,性质(2)只要对任何函数f和对形式dx^k给予证明即可. 在后一种情形,$dd(dx^k)=0$,因为x^k也是流形上的某个函数,于是我们只要证明$dd(f)\equiv0$即可.

我们有$(df)_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}$,从而

$$d(df)_{ij}=\frac{\partial(df)_j}{\partial x^i}-\frac{\partial(df)_i}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\equiv0.$$

定理证毕.

注意 定理1的条件(2)是以多元函数的极好的性质,混合偏导数与微分次序的无关性为根据的. 在某种意义下,性质(2)是这个性质在函数组(构成反对称张量的分量)情况下的极大的推广.

例1 在局部坐标系中,一切外微分形式按定义有和的形式:

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}.$$

因此,根据定理1,形式ω的梯度按公式

$$d\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}d(\omega_{i_1\cdots i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

算出. 其次,光滑函数的梯度df在局部坐标系中的分量为$\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$. 于是,$df=\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$. 因此,$d\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$. 很明显,后面的公式与公式(6.3)是等价的.

考察问题:寻找微分形式ω,使它满足恒等式

$$d\omega=\Omega,\tag{6.6}$$

其中Ω是给定的微分形式. 在每一个局部坐标系中,方程(6.6)化为偏导数的微分

方程组

$$\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_s}}=\Omega_{i_1\cdots i_{k+1}}.$$

根据定理1的条件(2),当且仅当 $d\Omega=0$ 时方程(6.6)的解存在.事实上,应用运算 d 于方程(6.6)的左边和右边部分,得到 $d\Omega=d(d\omega)=0$.特别,当 $\deg\Omega=1$ 时,问题归结为求流形 M 上的光滑函数 f,使它的梯度等于给定的形式 Ω.在局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中,形式 $\Omega=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i dx^i$,方程(6.6)等价于方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\Omega_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{6.7}$$

如果方程组(6.7)的解存在,那么,再对变量 x^j 微分(6.7),得到 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x^j}$.因为光滑函数 f 的混合偏导数与求微分的次序无关,所以

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial x^j}=\frac{\partial\Omega_j}{\partial x^i},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n. \tag{6.8}$$

条件(6.8)在无坐标的表示中等价于条件 $d\Omega=0$.我们指出,条件(6.8)对方程(6.7)在流形 M 上点 P 的充分小的邻域中有解是充分的.为此,我们从解方程组(6.7)的一个方程开始,例如,从 $\frac{\partial f}{\partial x^1}=\Omega_1$ 开始.有

$$f(x^1,\cdots,x^n)=\int_{x_0^1}^{x^1}\Omega_1(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^1+\varphi_2(x^2,\cdots,x^n), \tag{6.9}$$

其中 $\varphi_2(x^2,\cdots,x^n)$ 是变量 $(x^2,\cdots,x^n)$ 的任意的光滑函数.把(6.9)的右边部分代入方程组(6.7)的第二个方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^2}&=\int_{x_0^1}^{x^1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial x^2}(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^2}(x^2,\cdots,x^n)\\&=\Omega_2(x^1,\cdots,x^n).\end{aligned}$$

顾及到方程(6.8),我们得到

$$\begin{aligned}\Omega_2(x^1,\cdots,x^n)&=\int_{x_0^1}^{x^1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial x^1}(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^2}(x^2,\cdots,x^n)\\&=\Omega_2(x^1,\cdots,x^n)-\Omega_2(x_0^1,x^2,\cdots,x^n)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^2}(x^2,\cdots,x^n),\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^2}(x^2,\cdots,x^n)=\Omega_2(x_0^1,x^2,\cdots,x^n). \tag{6.10}$$

方程(6.10)的一般解为

$$\varphi_2(x^2,\cdots,x^n)=\int_{x_0^2}^{x^2}\Omega_2(x_0^1,x^2,\cdots,x^n)dx^2+\varphi_3(x^3,\cdots,x^n). \tag{6.11}$$

把(6.9),(6.11)代入方程组(6.7)的第三个方程,得到

$$\Omega_3(x^1,\cdots,x^n) = \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^3}(x^1,\cdots,x^n)\,dx^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^3}(x_0^1,x^2,\cdots,x^n)\,dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}(x^3,\cdots,x^n).$$

再顾及到方程(6.8),得到函数 φ_3 的方程

$$\begin{aligned}\Omega_3(x^1,\cdots,x^n) &= \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^1}(x^1,\cdots,x^n)\,dx^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^2}(x_0^1,x^2,\cdots,x^n)\,dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3,\cdots,x^n)\\ &= \Omega_3(x^1,\cdots,x^n) - \Omega_3(x_0^1,x^2,\cdots,x^n) + \Omega_3(x_0^1,x^2,\cdots,x^n)\\ &\quad - \Omega_3(x_0^1,x_0^2,x^3,\cdots,x^n) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3,\cdots,x^n);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3,\cdots,x^n) = \Omega_3(x_0^1,x_0^2,x^3,\cdots,x^n).$$

继续进行这个过程,我们得到函数序列 $\varphi_k(x^k,\cdots,x^n)$,它由递推公式

$$\varphi_k(x^k,\cdots,x^n) = \int_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x^k,\cdots,x^n)\,dx^k + \varphi_{k+1}(x^{k+1},\cdots,x^n),$$

$$\varphi_{n+1} = \text{常数},$$

$$f(x^1,\cdots,x^n) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1,\cdots,x_0^{k-1},x^k,\cdots,x^n)\,dx^k + \varphi_{n+1}$$

所定义. 最后的公式给出了方程组(6.7)的任意解,它依赖于一个参数 φ_{n+1} = 常数. 其实,方程组(6.7)的解的非唯一性可由外微分形式的一般的代数性质得到. 事实上,如果 f_1 和 f_2 是方程组(6.7)的两个解,那么 $df_1=\Omega, df_2=\Omega$,即 $d(f_1-f_2)=\Omega-\Omega=0$. 函数 $h=f_1-f_2$ 的梯度具有在流形 M 上恒等于0的性质. 于是,h 是局部常数函数. 若 M 是连通的流形,则此时 h 是常数函数. 因此,方程组(6.7)的任何两个解相差一个常数,而方程组(6.7)的所有解的集合或是空集,或是流形 M 上的所有光滑函数空间中的一维流形.

转到解方程组(6.6)的一般情形,可作出下面的结论:

(a) 方程组(6.6)存在解的必要条件是 $d\Omega=0$;

(b) 如果 ω 是方程组(6.6)的解,那么所有具有形如 $\omega+d\omega'$ 的形式也是方程组(6.6)的解.

6.1.2 光滑流形的上同调(de Ram 上同调)

方程组(6.6)解的性质用所谓 de Ram 上同调理论的术语来叙述是方便的.

定义 2 光滑流形 M 上的外微分形式 ω,若 $d\omega=0$,则称 ω 为闭的. 若它可表

示为 $\omega = d\omega'$，则称 ω 是**恰当的**. k 阶闭形式空间对恰当形式子空间的商空间称为流形 M 的 k 维**上同调**(de Ram)**群**，并表示为 $H^k(M)$.

所有恰当的形式 ω，因为 $d\omega = d(d\omega') = dd(\omega) = 0$，所以是闭的. 因此所有恰当形式的空间是闭形式空间的子空间. 上同调群 $H^k(M)$ 是向量空间(一般说是无限维的). 用上同调群的术语可叙述解方程(6.6)的问题如下：设 ω 是闭的 k 阶外微分形式. 用 $[\omega]$ 表示上同调群 $H^k(M)$ 的元素，$[\omega]$ 等于形式 ω 关于恰当形式子空间的旁集. 那么有下面的定理.

定理 2 考察方程

$$d\omega = \Omega, \deg\Omega = k+1. \tag{6.12}$$

(a) 方程(6.12)当且仅当形式 Ω 是闭的时有解，而上同调类 $[\Omega] \in H^{k+1}(M)$ 等于0.

(b) 方程(6.12)的任何两个解 ω 和 ω' 相差一个闭形式，即 $d(\omega - \omega') = 0$. 方程的所有解的集合是形式 ω 关于所有 k 阶闭形式子空间的旁集.

(c) 所有 k 阶闭形式的空间同构于 k 阶恰当形式的空间与上同调群 $H^k(M)$ 的直和.

证明 若 ω 是方程(6.12)的解，则 Ω 是恰当形式，就是说，按定义 $[\Omega] = 0$. 反之，若 $[\Omega] = 0$，则 Ω 是恰当形式，即对某个形式 ω，$\Omega = d\omega$，ω 就是方程(6.12)的解. 设 ω 和 ω' 是方程(6.12)的两个解，即 $d\omega = \Omega, d\omega' = \Omega$. 那么，$d(\omega - \omega') = d\omega - d\omega' = \Omega - \Omega = 0$，也就是说，$\omega - \omega'$ 是闭形式. 因此，方程(6.12)的所有的解 ω' 可用 ω 加上某个闭形式而得到. 用 $\Omega_k(M)$ 表示流形 M 上的所有 k 阶外微分形式的线性空间. 这时，梯度 d 是线性映射

$$d: \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M), \tag{6.13}$$

它是 k 阶形式的空间到 $(k+1)$ 阶形式空间的映射. k 阶闭形式的空间与映射(6.13)的核 $\mathrm{Ker}d \subset \Omega_k(M)$ 重合. 类似地，梯度 d 把空间 $\Omega_{k-1}(M)$ 映射到 $\Omega_k(M)$

$$d: \Omega_{k-1}(M) \to \Omega_k(M). \tag{6.14}$$

这时，k 阶恰当形式的空间与映射(6.14)的像重合：$\mathrm{Im}d = d(\Omega_{k-1}(M)) \subset \mathrm{Ker}d \subset \Omega_k(M)$. 因此，$k$ 维的上同调群 $H^k(M)$ 与商空间 $\mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$ 重合. 在此空间的符号中，我们用同一个字母 d 表示两个不同的映射(6.13)和(6.14). 但这不会引起混乱，因为我们考察的是 k 阶形式的空间 $\Omega_k(M)$ 的子空间. 在线性空间 $\mathrm{Ker}d$ 中，我们考察的是关于子空间 $\mathrm{Im}d \subset \mathrm{Ker}d$ 的代数的余子空间 H'. 于是，空间 $\mathrm{Ker}d$ 分解为它的两个子空间的直和 $\mathrm{Ker}d = \mathrm{Im}d \oplus H'$.

我们指出，空间 H' 同构于上同调群 $H^k(M)$. 事实上，设 $\varphi: H' \to H^k(M)$ 是将闭形式 $\omega \in H'$ 与它的旁集 $[\omega] \in H^k(M)$ 相对应的映射. 若 $\varphi(\omega) = 0$，则 $[\omega] = 0$，即 ω 是恰当形式. 这就是说，$\omega \in \mathrm{Im}d$. 因为子空间 $\mathrm{Im}d$ 与 H' 仅相交于零元素，所以 $\omega = 0$. 因此，映射 φ 是单射. 这时，x 是某个形式 $\omega \in \mathrm{Ker}d$ 关于子空间 $\mathrm{Im}d$ 的旁集，$x = [\omega]$. 因为空间 $\mathrm{Ker}d$ 分解为其子空间 $\mathrm{Im}d$ 和 H' 的直和，所以形式 ω 也分解为

和 $\omega = d\Omega + \omega', d\Omega \in \mathrm{Im}d, \omega' \in H'$. 这时，$x = [\omega] = [\omega'] = \varphi(\omega')$. 因此，$\varphi$ 是满同态. 于是，证明了 φ 是同构，定理证毕.

例 2 考察作为流形的实数开区间 $M = (a, b)$. 算出它的上同调群. 因为流形 M 是 1 维的，所以仅仅 0 和 1 阶的形式空间不等于 0. 首先考察 0 阶的形式空间 $\Omega_0(M)$. 任何 0 阶形式都是区间 (a, b) 上的光滑函数，它的梯度 df 具有形式 $df = \frac{df}{dx}(x)dx$，其中 x 是区间 (a, b) 上的笛卡儿坐标. 因此，0 阶闭形式的空间，即 $\mathrm{Ker}d$，由所有满足 $\frac{df}{dx}(x) \equiv 0$ 的函数组成，即 $\mathrm{Ker}d$ 由常数函数组成. 于是空间 $\mathrm{Ker}d$ 同构于一维空间 $\mathbf{R}^1$. 空间 $\Omega_0(M)$ 中的恰当形式是没有的. 因此，$H^0(M) = \mathrm{Ker}d = \mathbf{R}^1$. 现在考察 1 阶形式的空间 $\Omega_1(M)$. 因为 1 维空间上的所有的 2 阶形式都等于 0，所以 $\mathrm{Ker}d$ 与空间 $\Omega_1(M)$ 重合. 现在来计算 $\mathrm{Im}d$. 设 $\omega \in \Omega_1(M)$ 是任意的 1 阶微分形式. 在局部坐标系中具有形式 $\omega = g(x)dx$. 因此，若 $df = \omega$，则 $\frac{df}{dx}(x)dx \equiv g(x)dx$，即 $\frac{df}{dx} = g$. 于是函数 f 可以用等式

$$f(x) = \int_c^x g(x)dx, x \in (a, b), a < c < b \tag{6.15}$$

来确定. 这样，所有形式 $\omega \in \Omega_1(M)$ 可表示为适当的函数 f 的微分 $\omega = df$. 这就是说，$\mathrm{Im}d = \Omega_1(M) = \mathrm{Ker}d$. 这时，定义为商空间 $\mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$ 的一维上同调群 $H^1(M)$ 等于 0：$H^1(M) = 0$. 对其他的维数 $k \geqslant 2$，上同调群 $H^k(M)$ 等于 0，因为在一维流形 M 上的 k 阶 $(k \geqslant 2)$ 形式空间已等于 0 了. 答案：$H^0(M) = \mathbf{R}^1, H^k(M) = 0, k \geqslant 1$.

例 3 设 $M = S^1$ 是一维圆周. 与例 1 一样算出零维上同调群 $H^0(S^1) = \mathbf{R}^1$，和群 $H^k(S^1) = 0, k \geqslant 2$. 只要计算一维上同调群 $H^1(S^1)$ 即可. 由于 S^1 是一维的，核 $\mathrm{Ker}d$ 与 $\Omega_1(S^1)$ 重合. 设 φ 是圆周 S^1 的局部角参数. 对某个形式 $\omega = g(\varphi)d\varphi$，解方程 $df = \omega$. 函数 $f(\varphi)$ 对参数 φ 应是周期为 2π 的周期函数. 利用公式(6.15)，我们得到

$$f(\varphi) = \int_0^{\varphi} g(\varphi)d\varphi \quad 和 \quad \int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi = 0.$$

于是，不是所有的形式 $\omega \in \Omega_1(S^1)$ 都在梯度的像 $\mathrm{Im}d$ 中，而仅仅满足条件 $\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi = 0$ 时才是梯度的像. 我们指出，形式的空间 $\Omega_1(S^1)$ 分解为它自己的子空间的直和 $\Omega_1(S^1) = \mathrm{Im}d \oplus \mathbf{R}^1$，而且第二个被加项由常系数的形式 $g(\varphi) =$ 常数组成. 事实上，设 $\omega = g(\varphi)d\varphi$ 是任意的形式，$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi$. 那么，形式 $\omega' = g'(\varphi)d\varphi = (g(\varphi) - c)d\varphi$，因为 $\int_0^{2\pi} g'(\varphi)d\varphi = 0$，形式 ω' 也在 $\mathrm{Im}d$ 中. 另一方面，任

何形式 $\omega = g(\varphi)d\varphi$,是常系数 $g(\varphi) = c$ = 常数,$c \neq 0$ 时,由于 $\int_0^{2\pi} cd\varphi = 2\pi c \neq 0$ 而不在 Imd 中. 这时商群 $H^1(S^1) = \text{Ker}d/\text{Im}d = \Omega_1(S^1)/\text{Im}d = \mathbf{R}^1$. 答案:$H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbf{R}^1$;$H^k(S^1) = 0, k \geq 2$.

6.1.3 上同调群的拓扑性质

流形的每一个光滑映射在相反的方向上诱导出外微分形式的映射:

$$f: M_1 \to M_2,\ f^*: \Omega_k(M_2) \to \Omega_k(M_1).$$

定义 3 设 $f: M_1 \to M_2$ 是流形的光滑映射,$\omega \in \Omega_k(M_2)$ 是流形 M_2 上的 k 阶外微分形式. 由公式 $f^*(\omega)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \omega(df(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, df(\boldsymbol{\xi}_k))$,$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k \in T_P(M_1)$ 给出的流形 M_1 上的外微分形式称为形式 ω 的**逆像** $f^*(\omega)$. 其中 $T_P(M_1)$ 是流形 M_1 在 P 点的切空间,而 $df(\boldsymbol{\xi}_1), \cdots, df(\boldsymbol{\xi}_k) \in T_{f(P)}(M_2)$ 是 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 在映射 f 的微分下的像.

这样定义的微分形式空间的映射 $f^*: \Omega_k(M_2) \to \Omega_k(M_1)$,很明显,是线性空间的线性映射.

引理 1 若在局部坐标系中,映射 f 用函数组 $y^i = f^i(x^1, \cdots, x^n)$ 表示,而形式

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \cdots i_k}(y^1, \cdots, y^m) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k},$$

那么

$$f^*(\omega) = \sum \omega_{i_1 \cdots i_k}(f^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, f^m(x^1, \cdots, x^n)) \cdot df^{i_1}(x^1, \cdots, x^n) \wedge \cdots \wedge df^{i_k}(x^1, \cdots, x^n). \tag{6.16}$$

关系式(6.16)是所谓函数微分的不变性性质的推广,函数微分的不变性是说函数 $y = f(x)$ 的微分的形式 $dy = \frac{\partial f}{\partial x}(x)dx$ 与"变量 x 是自变量或是其他变量的函数"是无关的. 引理的证明基于定义的直接验证.

定理 3 微分形式的逆像满足下列关系式:

(a) 若 $f: M_1 \to M_2$ 和 $g: M_2 \to M_3$,则 $(gf)^* = f^* g^*$;

(b) 映射 f^* 与算子 d 可交换,即 $f^* d = df^*$;

(c) 映射 f^*,它把核 Ker$d$ 映射为核 Ker$d$,而把上同调类映射为上同调类:

$$f^*: H^k(M_2) \to H^k(M_1);$$

定理的证明是在任意局部坐标系中验证关系式为基础,留给读者作为练习.

定理 3 在许多关系式中是有用的. 例如,如果两个流形 M_1 和 M_2 是微分同胚的,那么它们的上同调群同构. 事实上,若 $f: M_1 \to M_1$ 是恒等的微分同胚,则同态 $f^*: H^k(M_1) \to H^k(M_1)$ 也是恒等的同构. 因此,若 $\varphi: M_1 \to M_2$ 是任意的微分同胚,则取逆微分同胚 $\psi: M_2 \to M_1$,得到两个可能的合成 $\psi\varphi: M_1 \to M_1$,$\varphi\psi: M_2 \to M_2$,而且二者都是恒等的微分同胚:$\psi\varphi = 1_{M_1}$,$\varphi\psi = 1_{M_2}$. 于是,应用定理 3,得到 $\varphi^* \psi^* = 1_{H^k(M_1)}$,$\psi^* \varphi^* = 1_{H^k(M_2)}$,即同态 φ^* 和 ψ^* 互逆. 于是,φ^*(ψ^* 也同样)是上同调群的

同构.

实际上,由流形的光滑映射$f:M_1\to M_2$诱导出来的上同调的同态$f^*:H^k(M_2)\to H^k(M_1)$,具有更强的性质.

定义4 设X,Y是任意拓扑空间,I是实数的单位线段,连续映射$f:X\times I\to Y$称为映射$f_0=f\big|_{X\times\{0\}}$和映射$f_1=f\big|_{X\times\{1\}}$之间的**同伦**.如果$X,Y$是光滑流形,而$f$是光滑映射,则$f$称为**光滑同伦**.同时,称映射$f_0$和$f_1$是**同伦的映射**.

定理4 同伦的光滑映射$f_0,f_1:M_1\to M_2$诱导出相同的上同调群的同态$f_0^*=f_1^*:H^k(M_2)\to H^k(M_1)$.

证明 我们作出外微分形式空间的这样的线性映射$D:\Omega_k(M_2)\to\Omega_{k-1}(M_1)$,使它对任何形式$\omega\in\Omega_k(M_2)$满足恒等式

$$(f_0^*-f_1^*)(\omega)=(dD\pm Dd)(\omega).\tag{6.17}$$

事实上,若ω是闭形式,它代表上同调类$[\omega]\in H^k(M_2)$,则形式$f_0^*(\omega)$和$f_1^*(\omega)$也是闭形式且它代表的上同调类为$f_0^*([\omega])$和$f_1^*([\omega])$.由于(6.17),形式差$f_0^*(\omega)-f_1^*(\omega)$等于$(dD\pm Dd)\omega=d(D\omega)\pm D(d\omega)=d(D\omega)$,这是因为$d\omega=0$.因为形式$f_0^*(\omega)$和$f_1^*(\omega)$在关于恰当形式子空间的一个旁集中,即它代表上同调的一个类$[f_0^*(\omega)]=[f_1^*(\omega)]$.于是$f_0^*([\omega])=f_1^*([\omega])$,这就是所要证明的.

这样,剩下的就是作出满足恒等式(6.17)的映射D.由于映射f_0和f_1是同伦的,所以存在光滑映射$F:M_1\times I\to M_2$,使$F(P,0)=f_0(P),F(P,1)=f_1(P)$.

如果在任何形如$\left(\xi_1,\cdots,\xi_{k-1},\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$的向量组上$k$阶形式$\Omega=0$,则我们说$k$阶形式$\Omega$在流形$M_1\times I$上**不依赖于**$dt$.

引理2 流形$M_1\times I$上的所有k阶外微分形式Ω可唯一地写成

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2\wedge dt,\tag{6.18}$$

而且,形式Ω_1,Ω_2与dt无关.

证明 引理2的证明在流形M_1的每一个图U_α中进行即可.此时,Ω_1可用形如$f(x^1,\cdots,x^n,t)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$的被加项的和式表示,而$\Omega_2$可用形如$f(x^1,\cdots,x^n,t)\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dt$的被加项的和式表示.容易验证,所指出的由两种被加项所组成的展开式与局部坐标系的选择无关.

假设

$$D(\omega)=\int_0^1\Omega_{2,M_1}(t)dt,$$

其中$\Omega=F^*(\omega)$,$\Omega=\Omega_1+\Omega_2\wedge dt$是按公式(6.18)的分解.若在$M_1\times I$上的形式$\Omega$不依赖于$dt$,则它的梯度$d\Omega$也按公式(6.18)分解为和$d\Omega=d_x\Omega_{M_1}+\dfrac{\partial}{\partial t}\Omega_{M_1}\wedge dt$.这里$dx$表示流形$M_1$上形式$\Omega_{M_1}$的梯度.现在我们证明公式(6.17).(6.17)的左边

部分可用下面的方法得到. 首先算出形式 $\Omega = F^*(\omega)$, 然后在嵌入 $\varphi_0: M_1 \to M_1 \times I$ 和 $\varphi_1: M_1 \to M_1 \times I$ 下取它在子流形 $M_1 \times \{0\}$ 和 $M_1 \times \{1\}$ 上的限制. 为此, 在形式 Ω 中必须置 $t=0$ 或 1 和 $dt=0$. 准确地表示, 就是

$$f_0^*(\omega) = \Omega_{1,M_1}(0),\ f_1^*(\omega) = \Omega_{1,M_1}(1). \tag{6.19}$$

为算出(6.17)的右边部分, 我们依次计算 $Dd(\omega)$ 和 $dD(\omega)$. 有

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= dF^*(\omega) = d(\Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt) \\ &= d_x \Omega_{1,M_1}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\Omega_{1,M_1}(t) \wedge dt + d_x \Omega_{2,M_1} \wedge dt. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Dd(\omega) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{1,M_1}(t) + d_x \Omega_{2,M_1}(t) \right) dt \\ &= \Omega_{1,M_1}(1) - \Omega_{1,M_1}(0) + d_x \int_0^1 \Omega_{2,M_1}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{6.20}$$

另一方面,

$$dD(\omega) = d_x \int_0^1 \Omega_{2,M_1}(t)\, dt. \tag{6.21}$$

比较(6.19)和(6.20), (6.21), 得到 $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (Dd - dD)(\omega)$, 这就是所要求证明的. 引理证毕.

推论 若 $M = \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间, 则 $H^0(M) = \mathbf{R}^1$, $H^k(\mathbf{R}^n) = 0, k \geqslant 1$.

证明 若 $n=0$, 即 M 由一点组成, 则推论显然成立, 因为一个点的流形没有非平凡的阶数大于 0 的形式. 0 阶形式, 即 M 上的函数, 它就是实数. 因此, $\Omega_0(M) = \mathbf{R}^1$, 梯度的核与 $\Omega_0(M)$ 重合, 而梯度的像等于 0. 于是, $H^0(M) = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d = \Omega_0(M)/0 = \Omega_0(M) = \mathbf{R}^1$. 现在设 $n>0$, $M_0 = \mathbf{R}^0$ 是一点的流形. 考察两个映射: $\varphi: M_0 \to M, \varphi(M_0) = 0 \in M, \psi: M \to M_0, \psi(M) = 0 = M_0$. 那么, 映射 φ 把流形 M_0 的唯一的点映到零向量, 而映射 ψ 把整个欧氏空间 $M = \mathbf{R}^n$ 映为 M_0 的唯一的点. 考虑两个可能的合成, $\psi\varphi: M_0 \to M_0, \varphi\psi: M \to M$. 合成 $\psi\varphi$ 显然是一点流形 M_0 的恒等映射. 合成 $\varphi\psi$ 把整个欧氏空间 M 映到零向量. 我们指出, 映射 $\varphi\psi$ 与欧氏空间的恒等映射同伦. 为此, 作出同伦的显式: $F: M \times I \to M, F(\boldsymbol{x}, t) = t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in M = \mathbf{R}^n, t \in [0,1] = I$. 在 $t=1$ 时, 得到恒等映射 $f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{x}, 1)$; 在 $t=0$ 时, 得到合成 $\varphi\psi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} = F(\boldsymbol{x}, 0)$. 根据定理 4, 映射 $\varphi\psi$ 与恒等映射诱导出同一个上同调群的同态. 这样, 同态 $(\psi\varphi)^*: H^k(M_0) \to H^k(M_0)$, $(\varphi\psi)^*: H^k(M) \to H^k(M)$ 是群的恒等同构. 因为 $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$, 所以同态 φ^* 和 ψ^* 是互逆的群同构. 因此, 欧氏空间的上同调群 $H^k(\mathbf{R}^n)$ 是和一点的空间一样的, 即 $H^0(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^1$, $H^k(\mathbf{R}^n) = 0, k \geqslant 1$. 推论证毕.

上面作出的推论有如下的简述, 这就是周知的 Poincaré 引理.

定理 5(Poincaré 引理) 流形 M 上的任何闭形式 Ω, 在每一点 $P \in M$ 的足够小的邻域中是恰当的, 即 $\Omega = d\omega$.

6.2 外形式的积分

6.2.1 微分形式在流形上的积分

考察光滑流形 M 上的任意子集 X. 如果对任何图 U_α,和坐标同胚 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbf{R}_+^n$,集合 $\varphi_\alpha(X\cap U_\alpha)\subset\mathbf{R}_+^n$ 在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中具有零测度,那么我们说集合 $X\subset M$具有**零测度** $\mu(X)=0$. 零测度集合的定义确实也与图册的选取无关. 为此,只要证明:若 $f:V_1\to V_2$ 是区域 $V_1\subset\mathbf{R}^n$ 到区域 $V_2\subset\mathbf{R}^n$ 的光滑的同胚,则任何零测度集合 $X\subset V_1$ 的像 $f(X)$ 是零测度集合. 流形上的零测度集合满足标准的性质,这些性质对欧氏空间来讲是正确的:

(a) $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(X_i)=0$,

(b) 光滑的$(n-1)$维流形 Y 在光滑的映射 $f:Y\to M$ 下的像 $f(Y)$ 具有零测度.

现在对 n 维定向流形 M 上的 n 阶外微分形式 ω,在 ω 具有紧致的支集的情况下,我们来定义形式 ω 的积分. 设形式 ω 的支集全部在某个具有坐标$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$的图 U_α 中,那么形式 ω 在图 U_α 中具有形式 $\omega=f_\alpha(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^n$. 我们设

$$\int_M\omega=\int_{U_\alpha}\cdots\int f_\alpha(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n. \tag{6.22}$$

公式(6.22)的右边部分存在并且不依赖于保持定向的局部坐标系$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$的选择. 为此应该应用多重积分的变量变换公式并考虑到变量变换的 Jacobi 行列式是正的即可.

一般情况下,形式 ω 在任意紧致支集上的积分由下面的方式给出.

定义 1 设 M 是 n 维有边界的光滑定向流形,ω 是具有紧致支集的 n 阶外微分形式,$\{\varphi_\alpha\}$是附属于图册$\{U_\alpha\}$的单位分解. 则

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_{U_\alpha}\varphi_\alpha\omega.$$

定义 1 是有效的,即它不依赖于单位分解的选择. 有效性的证明作为练习留给读者.

命题 1

(a) $\int_M(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1\int_M\omega_1+\lambda_2\int_M\omega_2,\quad\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}^1$.

(b) 如果 M'的定向与 M 的定向相反,则

$$\int_{M'}\omega=-\int_M\omega.$$

证明 性质(a)是显然的.

对性质(b)的证明,我们指出,流形 M 的相反的定向可以这样给出:不改变图册,而仅改变图册中每一个图 U_α 中第一个坐标的符号. 于是,容易确认形式积分的定义中所有的被加项也都改变符号. 命题证毕.

6.2.2 Stokes 公式

下面的定理提供一个公式,它概括了数学分析中的许多积分公式.

定理1 设 M 是有边界∂M 的 n 维定向流形,ω 是$(n-1)$阶的具有紧致支集的外微分形式. 则

$$(-1)^n\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega. \tag{6.23}$$

公式(6.23)称为 Stokes **公式的一般形式**. 在证明定理1以前,我们考察这个公式的几种特殊的情形.

例1 考察在平面 $\mathbf{R}^2$ 中无重点的光滑闭曲线 Γ,它是 $\mathbf{R}^2$ 中一个开区域 V 的边界. 在曲线 Γ 上引进参数 t,它给出了环绕的方向,于是也给出了 Γ 作为一维流形的定向. 这样,闭包 $\overline{V}$ 就是具有边界$\partial\overline{V}=\Gamma$ 的定向的二维流形. 若区域 $\overline{V}$ 的定向由线性坐标系(x^1,x^2)给出,并且环绕曲线 Γ 时参数 t 增加,区域 $\overline{V}$ 在左边,就说边界 Γ 的定向与区域 $\overline{V}$ 内的定向一致(参看图6.1). 设 ω 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上任意的一阶形式. 在坐标(x^1,x^2)中形式 ω 有形式 $\omega=P(x^1,x^2)dx^1+Q(x^1,x^2)dx^2$,则形式 ω 按曲线 Γ 积分与第二类积分一致:

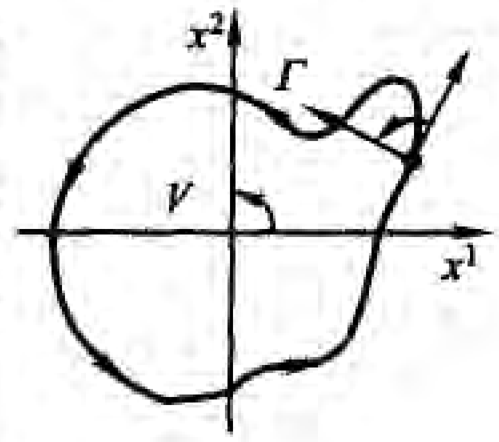


图6.1

$$\int_\Gamma\omega = \int_\Gamma Pdx^1+Qdx^2 = \int_{t_0}^{t_1}\left(P(x^1(t),x^2(t))\frac{dx^1}{dt}+Q(x^1(t),x^2(t))\frac{dx^2}{dt}\right)dt.$$

按照公式(6.23),我们有

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\omega &= \int_V d\omega = \int_V(dP\wedge dx^1+dQ\wedge dx^2)\\ &= \int_V\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2 = \iint_V\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2.\end{aligned} \tag{6.24}$$

于是,我们得到了周知的平面上的 Green 公式:

$$\int_\Gamma(Pdx^1+Qdx^2) = \iint_V\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1}-\frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2.$$

例2 类似地,设 Γ 是三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中无重点的光滑闭曲线,它界定了某个二维曲面 V. 按照公式(6.23)则可得到经典的 Stokes 公式. 为此,我们考察三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一阶形式 ω

$$\omega=P(x^1,x^2,x^3)dx^1+Q(x^1,x^2,x^3)dx^2+R(x^1,x^2,x^3)dx^3.$$

则曲线 Γ 上的第二类积分可解释为形式 ω 的积分

$$\int_{\Gamma}\omega = \int_{t_0}^{t_1}\left(P(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^1}{dt} + Q(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^2}{dt} + R(x^1,x^2,x^3)\frac{dx^3}{dt}\right)dt.$$

根据公式(6.23),我们有:$\int_{\Gamma}\omega = \int_V d\omega$;

$$\begin{aligned} d\omega &= dP\wedge dx^1 + dQ\wedge dx^2 + dR\wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1. \end{aligned}$$

于是,曲线 Γ 上的积分通过曲面 V 的第二类积分表示出来:

$$\begin{aligned} &\int_V (Pdx^1 + Qdx^2 + Rdx^3) \\ &= \iint_V \left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3}\right)dx^2dx^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^2}\right)dx^3dx^1\right\}. \end{aligned}$$

例 3　还有一个公式,Gauss-Остроградский 公式,是公式(6.23)的特殊情形. 设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭曲面,界定了区域 V. 设 ω 是二阶外微分形式. 在坐标(x^1,x^2,x^3)中,ω 为

$$\omega = Pdx^1\wedge dx^2 + Qdx^2\wedge dx^3 + Rdx^3\wedge dx^1.$$

那么,曲面 Γ 上的第二类积分可解释为形式 ω 的积分. 利用公式(6.23),得到

$$\int_{\Gamma}\omega = -\int_V d\omega;$$

$$\begin{aligned} d\omega &= dP\wedge dx^1\wedge dx^2 + dQ\wedge dx^2\wedge dx^3 + dR\wedge dx^3\wedge dx^1 \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\iint_{\Gamma}(Pdx^1dx^2 + Qdx^2dx^3 + Rdx^3dx^1) \\ &= -\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2dx^3. \end{aligned}$$

我们得到带有相反符号的 Gauss-Остроградский 公式. 由于在经典的 Gauss-Остроградский 公式中,曲面 Γ 的定向是由曲面 Γ 的切空间中一对向量$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$的选取使第三个向量 $\boldsymbol{e}_3$ 指向区域 V 的外部,所以取负号.

例 4　最后,也可把 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$ 看作公式(6.23)的特殊情形. Newton-Leibniz 公式的左边部分可表示为形式 $df = \frac{df}{dx}dx$ 在实数线段$[a,b]$上的积分,而$[a,b]$是一维有边界的定向流形. 线段$[a,b]$的边界是两点集$\{a,b\}$,我们把它看作是 0 维的流形. 但对 0 维的流形我们没有定义其定向的概念,因为它没有切向量. 因此可用下面的方法进行. 若一维流形 M 的境界点指向 M 内的方向的向量给出了 M 原来的定向,则认为此境界点有正的定向;相反,若指向

M 内的方向的向量给出了流形 M 的相反的定向，则认为此境界点有负的定向. 流形上的零阶形式自然是函数. 因此，函数在零维流形上的积分将看作在各点上函数值的和，其符号等于点在流形上的定向. 在现在的情况下，Newton-Leibniz 公式的右边部分将解释为函数 f 在由两点组成的境界 $\{a,b\}$ 上的积分. 同时，点 a 有正的定向，而点 b 有负的定向. 因此，$\int\limits_{\partial[a,b]} f = f(a) - f(b)$. 公式(6.23)同样具有形式：$\int\limits_{[a,b]} df = (-1)^n \int_{\partial[a,b]} f$.

定理 1 的证明 公式(6.23)的左边和右边关于形式 ω 是线性的，因此在形式 ω 分解为和 $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_N$ 时，公式(6.23)的证明只要对形式 ω 的支集是紧致的且在一个图中时的情形证明即可. 此外，只要对 ω 取形式

$$\omega = f(x^1, \cdots, x^n)\,dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

时证明公式(6.23)即可，其中 f 是定义在 $\mathbf{R}^n_+$ 中具有紧致支集的函数. 这时，$d\omega = (-1)^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 我们考察两种情形. 设 $k < n$，此时形式 ω 限制在边界 $\mathbf{R}^{n-1}_0 \subset \mathbf{R}^n_+$ 上因为 $dx^n = 0$ 而等于 0. 因此，$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_0} \omega = 0$. 另一方面，$\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} d\omega = \int\cdots\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} (-1)^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^1 \cdots dx^n$. 化为重积分后，首先按变量 x^k，然后按其他的变量，我们得到

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} d\omega = \int\cdots\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_+} dx^1 \cdots dx^{k-1} dx^{k+1} \cdots dx^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

由于下面的明显的关系式：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k = f(x^1, \cdots, x^n)\Big|_{x^k=-\infty}^{x^k=+\infty}$，里面的积分为 0. 因此 $\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} d\omega = 0$. 现在设 $k = n$. 这时 $\omega = f(x^1, \cdots, x^n)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$,

$$d\omega = (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \cdots, x^n)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n.$$

我们有

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_0} \omega = \int\cdots\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_0} f(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\,dx^1 dx^2 \cdots dx^{n-1};$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} d\omega &= \int\cdots\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^1 \cdots dx^{n-1} dx^n \\ &= \int\cdots\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_0} dx^1 \cdots dx^{n-1} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \cdots \int dx^1 \cdots dx^{n-1} \left((-1)^{n-1} f(x^1, \cdots, x^n) \Big|_{x^n=0}^{x^n=+\infty} \right)$$

$$= (-1)^n \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \cdots \int f(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}.$$

因此，$\int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \omega = (-1)^n \int_{\mathbf{R}_+^n} d\omega$. 这样，为完成证明，把形式 ω 分解为 $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_N$，使得每一个被加项的支集在流形 M 的一个图之中. 考察图册 $\{U_\alpha\}$，和附属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$. 这时 $1 \equiv \sum \varphi_\alpha, \omega = \sum \varphi_\alpha \omega, \mathrm{supp}\varphi_\alpha \omega \subset U_\alpha$. 定理证毕.

6.3　映射度及其应用

本节中我们叙述映射的一个重要的几何不变量——映射度.

6.3.1　映射度

定义 1　设 $f: M_1 \to M_2$ 是紧致、连通、定向闭流形上的光滑映射，$\dim M_1 = \dim M_2$，$P \in M_2$ 是正则点. 对 $Q \in f^{-1}(P)$，若映射 f 在点 Q 的 Jacobi 行列式是正的，则令 $\varepsilon(Q) = +1$，若此行列式是负的，则令 $\varepsilon(Q) = -1$. 称数

$$\deg_P f = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \varepsilon(Q) \tag{6.25}$$

为映射 f(关于正则点 P)的映射度.

定义 1 是假设至少存在一个正则点为前提的. 为此，我们应用分析中在 Sard 定理名下的已知的定理.

定理 1　设 $f: M_1 \to M_2$ 是紧致流形的光滑映射，则映射 f 的正则点 $Q \in M_2$ 的集合 G 是处处稠密的开集.

为判明定义 1 的有效性，我们简明陈述下面的论断.

定理 2　公式(6.25)与下列的选取无关：

(a) 正则点 $P \in M_2$ 的选取；

(b) f 在光滑同伦映射类中的选取.

证明　(a)可归结为(b). 事实上，若 P 和 P' 是两个正则点，则存在连续的微分同胚簇 $\varphi_t: M_2 \to M_2$，使 φ_0 是恒等映射，而 $\varphi_1(P') = P$. 这时，映射 f 和 $\varphi_1 \circ f$ 同伦，并且点 P 是它们的正则点. 另一方面，$\deg_P(\varphi_1 \circ f) = \deg_{P'}(f)$. 于是设 $F: M_1 \times I \to M_2$ 是光滑映射，点 $P \in M_2$ 是 $f_0 = F|_{(M_1 \times \{0\})}$ 和 $f_1 = F|_{(M_1 \times \{1\})}$ 的正则点. 这时，对映射 F 来说，在境界 $\partial(M_1 \times I) = (M_1 \times \{0\}) \cup (M_1 \times \{1\})$ 的所有点中，点 P 是正则点.

根据 Sard 定理，对映射 F，正则点 P' 处在离 P 点任意近的位置上. 这时，对映

射 f_0 和 f_1 来说点 P' 也是正则点. 因为可以选择点 P' 离点 P 任意近,所以对每一个原像 $Q\in f_0^{-1}(P)$,存在唯一的靠近它的原像 $Q'\in f_0^{-1}(P')$,而且有 $\varepsilon(Q)=\varepsilon(Q')$. 这就是说,$\deg_P f_0=\deg_{P'} f_0$. 类似地,我们可得 $\deg_P f_1=\deg_{P'} f_1$. 再用 P 表示点 P',得到原像 $F^{-1}(P)$ 是具有边界的一维光滑流形,而且边界 $\partial F^{-1}(P)$ 在 $\partial(M_1\times I)$ 中. 一维紧致流形总是其连通分支的并——圆周和线段的并(参看图 6.2). 因此,流形 $F^{-1}(P)$ 也可分解为线段 I_k 和圆周 S_l^1 的不连通和:

$F^{-1}(P)=\bigcup\limits_k I_k\cup(\bigcup\limits_l S_l^1)$. 每一条线段 I_k 有两个境界点 a_k 和 b_k. 所有点 a_k 和 b_k 的集合 $\{a_k,b_k\}$ 构成原像 $f_0^{-1}(P)$ 和 $f_1^{-1}(P)$ 的并.

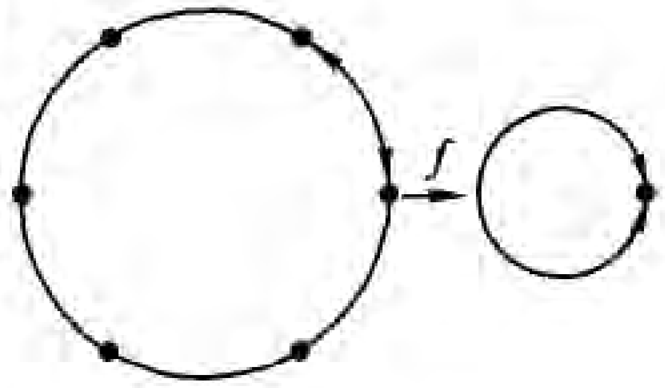


图 6.2

如果点对 (a_k,b_k) 在边界 $\partial(M_1\times I)$ 的一个分支中,那么 $\varepsilon(a_k)=-\varepsilon(b_k)$,而若在不同的分支中,则有 $\varepsilon(a_k)=\varepsilon(b_k)$. 这样,原像 $f_0^{-1}(P)$ 和 $f_1^{-1}(P)$ 中的所有的点可划分为点对,而且如果一对点在境界 $\partial(M_1\times I)$ 的一个分支中,那么在和式(6.25)中它给出的贡献为 0. 而如果一对点在境界 $\partial(M_1\times I)$ 的不同的分支中,那么它在和式(6.25)中给出的贡献对 $\deg_P f_0$ 和对 $\deg_P f_1$ 则是相同的. 定理证毕.

6.3.2 代数基本定理

如此称谓的定理它的含义是:任何阶数≥1 的多项式 $P(z)$,在复数域上哪怕存在一个复数根也好.

这个定理有许多不同的证明. 其中之一是利用映射度的概念和定理 2 证明的. 考察复数平面的光滑映射 $P:\mathbf{C}^1\to\mathbf{C}^1$,它由下面的公式给出

$$w=P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0.$$

把二维球 S^2 看作复射影直线 $\mathbf{C}P(1)$ 时,这个映射可延拓到二维球 S^2 到自身的映射. 为此,我们把复数参数 z 看作 $\mathbf{C}P(1)$ 上的齐次坐标之比 $z=\dfrac{z_1}{z_0}$,$z_0\neq0$. 类似地,$w=\dfrac{w_1}{w_0}$,$w_0\neq0$. 因此,映射

$$w_1=z_1^n+a_{n-1}z_1^{n-1}z_0+\cdots+a_1z_1z_0^{n-1}+a_0z_0^n,w_0=z_0^n \tag{6.26}$$

确切地定义了 $\mathbf{C}P(1)$ 到自身的映射. 显然,映射(6.26)是光滑映射. 我们来算出它的映射度. 按照定理 2,可以取同伦于它的映射代替映射 f. 考察由公式(6.27)给出的按照参数 $t(0\leqslant t\leqslant1)$ 的同伦

$$w_1=z_1^n+t(a_{n-1}z^{n-1}z_0+\cdots+a_0z_0^n),w_0=z_0^n. \tag{6.27}$$

在 $t=0$ 时,得到简单的映射

$$w_1=z_1^n,w_0=z_0^n. \tag{6.28}$$

在局部坐标 $w = w_1/w_0, z = z_1/z_0$ 中，它的形式为 $w = z^n$，并且，比方说点 $w = 1$ 是正则点. 事实上，应该计算映射(6.28)的 Jacobi 行列式. 在 $z \neq 0$ 时，它等于 $n^2|z^{n-1}|^2 > 0$.

由于方程 $z^n = 1$ 恰好具有 n 个解，所以(6.28)的映射度同时也是(6.26)的映射度，都等于 n: $\deg f = n$. 假如多项式 P 不存在根，这就是说点 $w = 0$ 不属于映射 f 的像. 于是映射 $f: \mathbf{C}P(1) \to \mathbf{C}P(1)$ 存在具有原像为空集的正则点($w = 0$)，即映射 f 的映射度为 0. 这矛盾证明了定理成立.

6.3.3 形式的积分

定理 3 设 $f: M_1 \to M_2$ 是定向、紧致、连通流形的光滑映射，ω 是外微分形式，$\deg\omega = \dim M_1 = \dim M_2$. 则

$$\int_{M_1} f^*(\omega) = \deg f \cdot \int_{M_2} \omega. \tag{6.29}$$

证明 因为公式(6.29)左边和右边部分关于 ω 是线性的，所以对其支集在点 $Q \in M_2$ 的一个小邻域 U 中的形式 ω 证明公式即可. 我们考察所有邻域 U 由正则点组成的情形. 原像 $f^{-1}(U)$ 由有限个开集的并 $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ 组成，在每一个开集中，映射 f 都是微分同胚. 由于 $\mathrm{supp} f^*(\omega) \subset f^{-1}(U)$，所以

$$\begin{aligned}
\int_{M_1} f^*(\omega) &= \int_{f^{-1}(U)} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \int_{V_i} f^*(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{sgn} df|_{V_i}) \int_U \omega = \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{sgn} df|_{V_i}) \int_U \omega \\
&= \Big[\sum_{i=1}^{N} (\mathrm{sgn} df|_{V_i})\Big] \int_U \omega \\
&= \Big[\sum_{P \in f^{-1}(Q)} \varepsilon(P)\Big] \int_U \omega = \deg f \cdot \int_{M_2} \omega.
\end{aligned}$$

在一般情况下，若邻域 U 也含有非正则点时，就按 Sard 定理取另外的邻域 U_0，它也仅由正则点组成. 不失一般性可以认为，无论是 U 还是 U_0 都与开圆盘微分同胚. 于是存在流形 M_2 的微分同胚族 φ_t，将连续地将开集 U 变为开集 U_0，即

$$\varphi_0(U) = U, \varphi_1(U_0) = U.$$

这就是说形式 $\omega = \varphi_0(\omega)$，$\omega_1 = \varphi_1(\omega)$ 是同伦的，即按 Stokes 公式给出相同的积分值.

6.3.4 超曲面的 Gauss 映射

考察欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的超曲面 M，$\dim M = n - 1$，它由方程 $F(x) = 0$ 给出，$\mathrm{grad} F \neq 0$. 这时，在流形 M 上也就确定了黎曼度量 $\{g_{ij}\}$；体积形式 $\sqrt{|g|} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1}$，

其中$|g| = \det|g_{ij}|$；Gauss 曲率 $K = K(y^1,\cdots,y^n)$. 我们定义新的形式 $Kd\sigma = K(y^1,\cdots,y^n)\sqrt{|g|}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{n-1}$，称它为超曲面 M 的曲率形式. 此外，对超曲面 M，定义光滑映射 $f:M\to S^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$，它使每一点 P 对应于它的法向量. 这个映射称为**球面表示或球面映射**. 设 Ω 是球面 S^{n-1} 上的体积形式.

定理 4 对超曲 M 的球面表示 $f:M\to S^{n-1}$，在球面 S^{n-1} 上的体积形式 Ω 的原像等于超曲面 M 上的曲率形式：$f^*\Omega = Kd\sigma$.

证明 不失一般性，可以认为，在点 $P_0\in M$ 的邻域中，流形 M 是函数 $x^n = f(x^1,\cdots,x^n)$ 的图像，而在点 $P_0=(0,\cdots,0)$ 流形 M 的法线平行于 Ox^n. 这时，在点 P_0，黎曼度量为单位矩阵形式：$g_{ij}=\delta_{ij}$. 那么，在点 P_0 的 Gauss 曲率为 $K = \det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)$. 在球面 $S^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 上，点 $f(P_0)=(0,\cdots,0,1)$ 的邻域中，选取坐标 $(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 作为它的坐标. 这样，球面 S^{n-1} 上在点 $f(P_0)$ 的度量也具有对角形式 $g_{ij}=\delta_{ij}$. 于是球面上在点 $f(P_0)$ 的形式 Ω 等于 $\Omega = dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$. 现在来计算球面映射. 流形 M 的切空间由切向量

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\f_{x^1}\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\f_{x^2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{r}_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\f_{x^{n-1}}\end{pmatrix}$$

生成. 这时法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\cdots+f_{x^{n-1}}^2}}\begin{pmatrix}f_{x^1}\\f_{x^2}\\\vdots\\f_{x^{n-1}}\\-1\end{pmatrix}.$$

形式 Ω 在球面映射下的原像可在 dx^i 的位置用法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标的微分代替而得到

$$f^*(\Omega)=d\frac{f_{x^1}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\cdots+f_{x^{n-1}}^2}}\wedge\cdots\wedge d\frac{f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1+f_{x^1}^2+\cdots+f_{x^{n-1}}^2}}.$$

进行计算并注意到函数 f 的一阶偏导数在点 P_0 等于 0，$f_{x^i}(P_0)=0$，所以

$$f^*(\Omega)=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}=Kd\sigma.$$

定理 3 证毕.

作为推论，我们得到周知的 Gauss-Bonnet 定理.

定理 5 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中闭的紧致曲面，则 $\int_M Kd\sigma = 4\pi\lambda$，这里 λ 是某个整数.

证明 应用定理 3 和定理 4

$$\int_M Kd\sigma = \int_M f^*(\Omega) = (\deg f)\int_{S^2}\Omega = 4\pi\cdot\deg f.$$

第七章　黎曼几何的简单变分问题

7.1　泛函的概念　极值函数　Euler 方程

变分问题是重要的一类数学问题，主要来源于一般的数学和物理的运动和稳定性问题. 比方说，我们看到的测地轨线就是相应的变分问题的解.

我们从泛函和它的变分的一般概念开始. 我们已经了解"泛函"：每一个光滑曲线段 $\gamma(t)$ 与它的长 $l_a^b(\gamma)=\int_a^b|\dot{\gamma}|dt$ 相对应. 这个对应 $\gamma(t)\to l_a^b(\gamma(t))$ 已经不是通常的"函数"了，因为"自变量"在这里是任意的光滑曲线. 这个对应：$\gamma\to l(\gamma)$ 是定义在光滑曲线 $\gamma(t)$ 的空间上的非线性泛函的重要例子. 我们推广这个例子.

在 $\mathbf{R}^k$ 中，考察具有光滑边界 ∂D 的有界区域 D；设 $u^1,\cdots,u^k$ 是笛卡儿坐标. 考察 D 上所有可能的光滑向量函数 $\boldsymbol{f}(u^1,\cdots,u^k)=\boldsymbol{f}(u^\alpha)=(f^1(u^\alpha),\cdots,f^k(u^\alpha))$. 区域 D 称为参数 $u^1,\cdots,u^k$ 变化的范围. 设给出两个函数：$\{f^i(u^\alpha)\}$ 和 $\{g^i(u^\alpha)\}$，$1\leqslant i\leqslant n$；这时对任何数 a 和 b 确定了向量函数 $a\boldsymbol{f}+b\boldsymbol{g}=\{af^i(u^\alpha)+bg^i(u^\alpha)\}$. D 上的所有光滑的向量函数组成无限维线性空间 F. 我们所考察的正是这个空间 F 中的各种泛函. 向量函数 $\boldsymbol{f}\in F$ 就是泛函 $J[\boldsymbol{f}]$ 的"自变量".

定义 1　连续映射 $J:F\to\mathbf{R}^1$ 称为空间 F（或它的子集）上的**泛函** J. 如果 $J[a\boldsymbol{f}+b\boldsymbol{g}]=aJ[\boldsymbol{f}]+bJ[\boldsymbol{g}]$，则称泛函 J 为**线性的**.

附注　设 D 是直线上的线段：$u^1=t$，$\boldsymbol{f}(t)=(f^1(t),f^2(t),f^3(t))$——向量函数，即 $\boldsymbol{f}(t)=\gamma(t)$ 定义了 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线，这里 F 是所有这种曲线的空间. 考察积分 $J[\boldsymbol{f}]=\int_0^1|\dot{\gamma}(t)|dt=\int_D|\boldsymbol{f}(t)|dt$，即曲线 $\boldsymbol{f}(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的长. 这个泛函不是线性的.

设给出依赖三组变量：$u^\beta, 1 \leqslant \beta \leqslant k; p^i, 1 \leqslant i \leqslant n; q^i_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant k, 1 \leqslant i \leqslant n$ 的光滑函数 $L(u^\beta; p^i; q^i_\alpha)$. 称这个函数为 Lagrange **函数**. 设 $\boldsymbol{f} = \{f^i(u^\beta)\}$ 是光滑的向量函数，定义在 $D \subset \mathbf{R}^k$ 上. 作出泛函 $J[\boldsymbol{f}]$

$$J[\boldsymbol{f}] = \int_D L(u^\beta; f^i(u^\beta); f^i_{u^\alpha}(u^\beta))\, d\sigma^k,$$

这里，$\int_D$ 表示在 k 维区域 D 上的多重积分 $\underset{D}{\int\cdots\int}$ 取 k 维体积，$d\sigma^k = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ 是 D 中的 k 维体积元素，$f_{u^\alpha}(u^\beta) = \dfrac{\partial f^i(u^\beta)}{\partial u^\alpha}$ 是偏导数. 把 $J[\boldsymbol{f}]$ 简略地写为：$J[\boldsymbol{f}] = \int_D L(u^\beta, f^i, f_{u^\alpha})\, d\sigma^k$. 这样的一类泛函实际上包涵了力学和物理中富有内容的泛函例子.

考察弧长泛函

$$J[\boldsymbol{f}] = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}}\, dt,$$

即 $\boldsymbol{f}(t) = \gamma(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$；$\gamma(t)$ 是具有黎曼度量 g_{ij} 的 n 维流形中的光滑曲线，Lagrange 函数为

$$L\left(t; x^1, \cdots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \cdots, \frac{dx^n}{dt}\right) = \sqrt{g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)\dot{x}^i \dot{x}^j}\,.$$

对平面曲线 $\gamma(t)$，它以方程 $y = f(x)$ 给出，则有

$$L(f_u) = \sqrt{1 + f_u^2}.$$

这个泛函同样也可定义在光滑流形 M^k 中的曲线上. 通常，我们考虑曲线的小的邻域；从而事情就转移到配有黎曼度量（一般是非欧氏的）k 维欧氏空间的某个区域中. 同时，给出曲线的向量函数的加法可以仅在固定曲线的某个邻域中实现.

另外的例子：面积泛函 $J(f) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv$. 这里 $\boldsymbol{f} = (x^1(u,v); x^2(u,v); x^3(u,v))$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中二维曲面，带有诱导度量 $ds^2 = Edu^2 + \alpha F du dv + G dv^2$；

$$L = L(\boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\langle \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_u \rangle \langle \boldsymbol{f}_v, \boldsymbol{f}_v \rangle - \langle \boldsymbol{f}_u, \boldsymbol{f}_v \rangle^2}.$$

可以考察面积泛函的另一种形式：$J[\boldsymbol{f}] = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy$，这里的 D 是 $\mathbf{R}^2(x,y)$ 中的区域；$\boldsymbol{f}(x,y) = (x, y, z(x,y))$，即向量函数 $\boldsymbol{f}$ 由图形 $z = f(x,y)$ 给出；这里 $L(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$. 这些向量函数的加法就是这些函数在 $\mathbf{R}^3$ 中 D 上的图形的加法. 但是，远远不是每一个 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面都可由单值函数的图形给出的.

我们首先感兴趣的是泛函 $J(f)$ 的"临界点". 我们从类似于通常的函数着手. 取一个或两个变量的函数：$\alpha(t)$ 或 $\alpha(u,v)$. 在很大的程度上，函数 $\alpha(t)$ 或 $\alpha(u,v)$ 的状态决定于 $\alpha'(t_0) = 0$（或 $\alpha_u(u_0, v_0) = 0, \alpha_v(u_0, v_0) = 0$）的点的位置和数目，即，

使 grad$(\alpha)=0$ 的点的位置和数目. 使 grad$(\alpha)=0$ 的这些点称为函数 α 的**临界点**或**驻点**. 例如,关于函数 $\alpha=\alpha(t)$,这样的点是极大点,极小点和拐点(图 7.1). 如果 $\alpha=\alpha(u,v)$,那么在使 grad$(\alpha)=0$ 的点中,包含了极大点,极小点和鞍点(图 7.2).

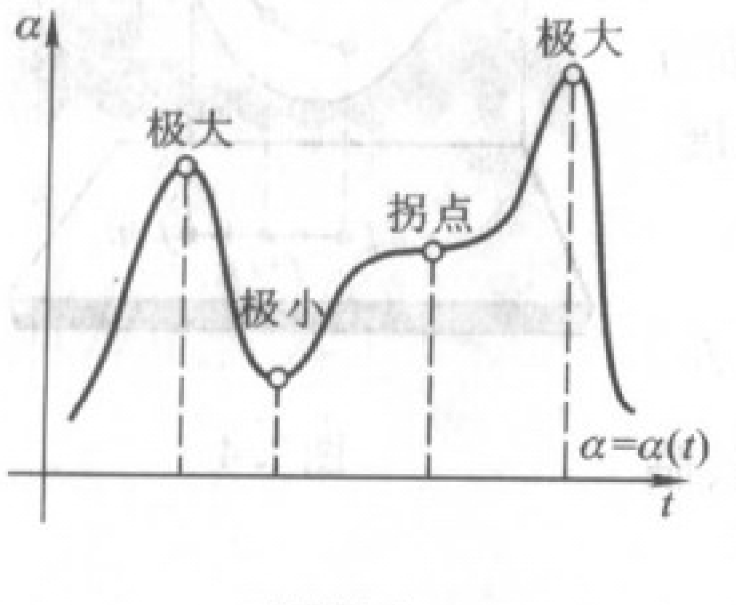


图 7.1

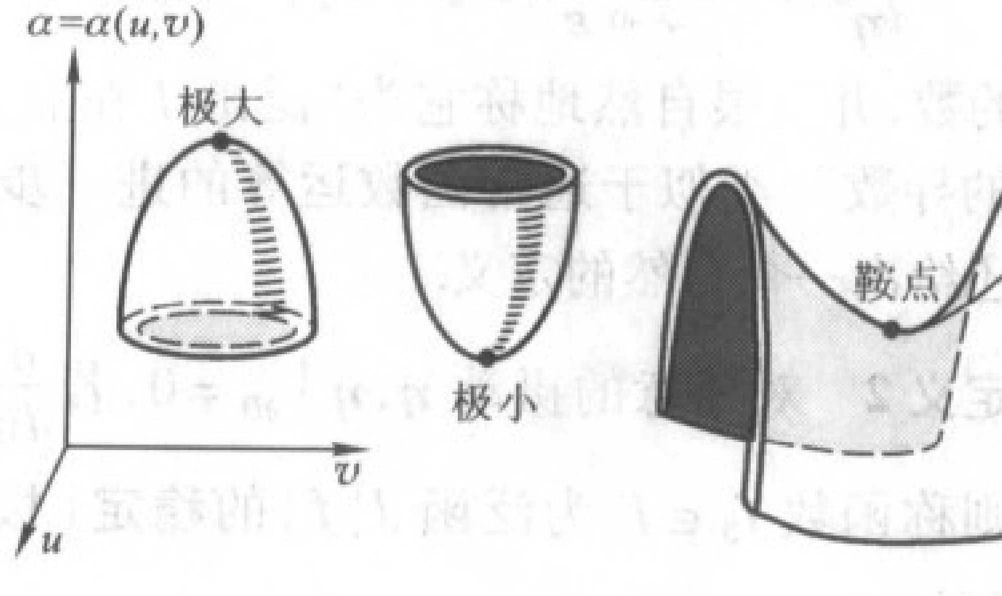


图 7.2

例如,在物理学和力学中,在这些点,势函数有极值,这与系统(稳定的或非稳定的)的平衡位置相适应.

类似地,在研究 $J[\boldsymbol{f}]$ 时,对寻求那些稳定的向量函数 $\boldsymbol{f}_0$ 给予极大的注意,稳定的向量函数 $\boldsymbol{f}_0$,就是在 $\boldsymbol{f}_0$ 泛函 J 达到极大、极小或具有"鞍点". 为把问题说得更准确,必须了解什么是泛函 J 在某一点 $\boldsymbol{f}\in F$ 的"方向导数". 如已经指出的那样,对函数 $\alpha(u,v)$,我们感兴趣的所有的极值点是方程 grad$(\alpha)=0$ 的解. 如果在点 $(u,v)\in G$,给出了某个方向(向量)$\boldsymbol{a}=(a^1,a^2)$,那么函数 $\alpha(u,v)$ 关于方向 $\boldsymbol{a}$ 的导数为

$$\frac{d}{d\boldsymbol{a}}\alpha(u,v)=a^1\frac{\partial\alpha}{\partial u}+a^2\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\langle\boldsymbol{a},\text{grad}(\alpha)\rangle$$

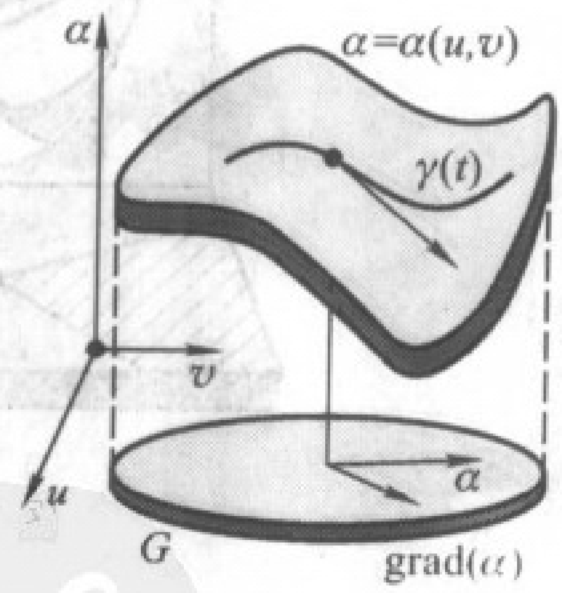


图 7.3

(参看图 7.3). 由此得到当且仅当 $\frac{d}{d\boldsymbol{a}}\alpha(u_0,v_0)=0$ 对点 (u_0,v_0) 的任何方向 $\boldsymbol{a}$ 成立时,grad$\alpha(u_0,v_0)=0$. 关于方向 $\boldsymbol{a}$ 的导数可以这样计算

$$\frac{d\alpha}{d\boldsymbol{a}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\alpha(u+\varepsilon a^1,v+\varepsilon a^2)-\alpha(u,v)],$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2)$,ε 是参数;即

$$\frac{d\alpha}{d\boldsymbol{a}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\alpha(\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{a})-\alpha(\boldsymbol{u})],$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u,v)$ 是点在区域 G 中的向径. 我们也就是把这样的关于方向导数的概念推广到泛函 $J[\boldsymbol{f}]$ 的情形.

考察"点"$\boldsymbol{f}\in F$,并考虑函数 $\boldsymbol{\eta}\in F$,足够小,并且使 $\boldsymbol{\eta}|_{\partial D}\equiv 0$. 这样的函数 $\boldsymbol{\eta}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**摄动**. 我们使点 $\boldsymbol{f}$ 位移到点 $\boldsymbol{f}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}$(参看图 7.4). 函数 $\boldsymbol{\eta}$ 给出了"点"$\boldsymbol{f}$ 的"位移方向",与通常的函数情况不同点在于现在的"方向"有无穷多个.

其次，像通常函数一样，我们作下面的表示式：

$\frac{1}{\varepsilon}(J[\boldsymbol{f}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}]-J[\boldsymbol{f}])$. 关于 ε 取极限时，得到用

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J[f]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(J[\boldsymbol{f}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}]-J[\boldsymbol{f}])$$

表示的数，并且很自然地称它为"泛函 J 在点 $\boldsymbol{f}$ 按方向 $\boldsymbol{\eta}$ 的导数". 类似于通常函数运算的进一步发展，我们还给出一个自然的定义.

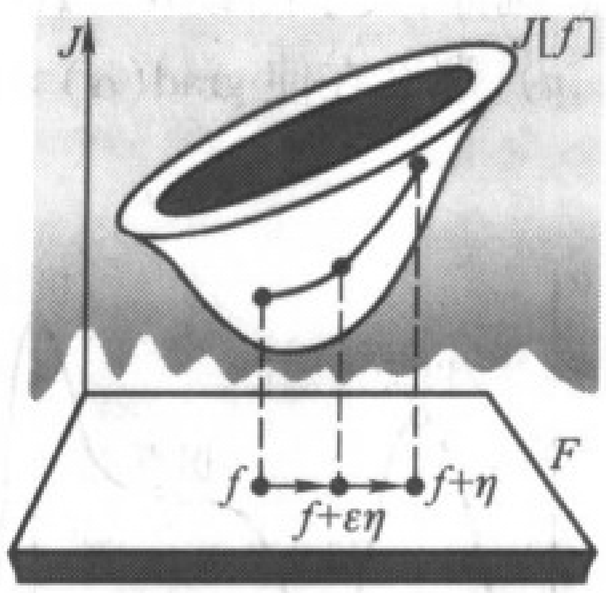


图 7.4

定义 2　对任意的摄动 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}|_{\partial D}=0$，若 $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J[\boldsymbol{f}_0]=0$，则称函数 $\boldsymbol{f}_0\in F$ 为泛函 $J[\boldsymbol{f}]$ 的**稳定**（**极值、临界**）**函数**.

把泛函 J 表示为 F 上的"图形"的形式是方便的（图 7.5）. 如果 $\boldsymbol{f}\in F$ 是固定的，那么函数的集合 $\boldsymbol{f}+\varepsilon\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}|_{\partial D}=0$，可以等同于线性空间 T，把泛函 J 限制在 T 上. 这些"点" $\boldsymbol{f}_0$（这里 $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J(\boldsymbol{f}_0)=0$ 对任何 $\boldsymbol{\eta}$ 成立），是泛函 $J(\boldsymbol{f})$ 限制在子空间 $T\subset F$ 上的极小点，极大点或"鞍点". J 在 T 上限制的运算是清楚的：我们讨论使 $\boldsymbol{f}$ 在境界 ∂D 上不改变的摄动 $\boldsymbol{\eta}$ 时 J 的状况. 例如，在图 7.6 中，曲线的端点固定在点 A 和 B：$\boldsymbol{\eta}(A)=\boldsymbol{\eta}(B)=0$.

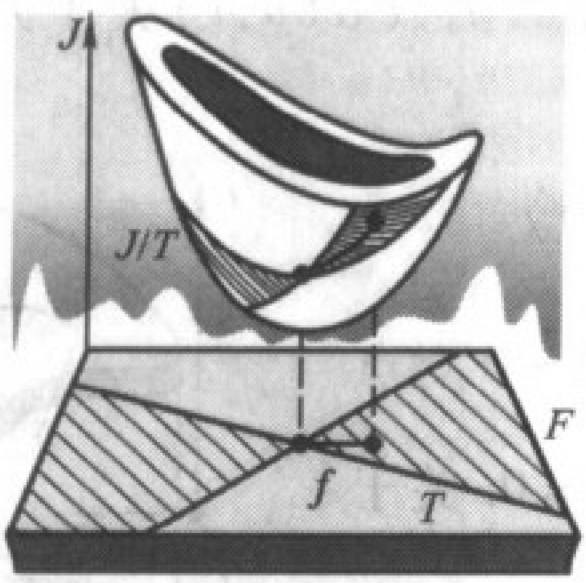


图 7.5

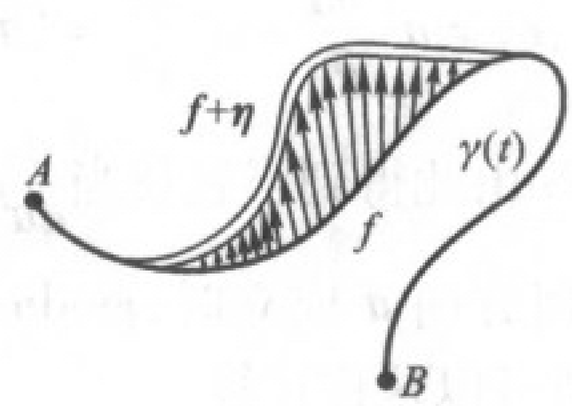


图 7.6

我们导出关于微商 $\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J[\boldsymbol{f}]$ 的公式. 这个表示式通常称为 $J[\boldsymbol{f}]$ 的第一变分.

设 $\delta J=J[\boldsymbol{f}+\varepsilon\boldsymbol{\eta}]-J[\boldsymbol{f}]$；这时

$$\delta J=\int_D[L(u^\beta;f^i+\varepsilon\eta^i;f^i_{u^\alpha}+\varepsilon\eta^i_{u^\alpha})-L(u^\beta;f^i;f^i_{u^\alpha})]d\sigma^k$$

把被积式用 Taylor 级数展开，得到

$$\delta J=\int_D\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial f^i}\varepsilon\eta^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\varepsilon\eta^i_{u^\alpha}+o(\varepsilon)\Big]d\sigma^k$$

$$= \varepsilon\iint_D \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial f^i}\eta^i + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\eta^i_{u^\alpha} \right] + o(\varepsilon)/\varepsilon \right\} d\sigma^k$$

我们按分部积分法进行积分

$$\delta J = \varepsilon\int_D \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\eta^i\right) d\sigma^k + \varepsilon\int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right)\right)\eta^i d\sigma^k + \int_D o(\varepsilon)d\sigma^k.$$

因为所有的函数都是光滑的,所以第一个积分中关于 u^α 的积分可以与关于其他变量 $u^i(1\leqslant i\leqslant n, i\neq\alpha)$ 的积分分开来,根据改变积分次序的定理,给出

$$\int_D \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\eta^i\right) d\sigma^k = \int_{u^1\ldots\hat{u}^\alpha\ldots u^k}\cdots\int\left[\int_P^Q \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\eta^i\right) du^\alpha\right] d\sigma^{k-1}.$$

(参看图 7.7). 因为在 $\int_P^Q$ 中,变量 $u^1,\cdots,\hat{u}^\alpha,\cdots,u^n$(不包含变量 u^α)可以看作参数,所以

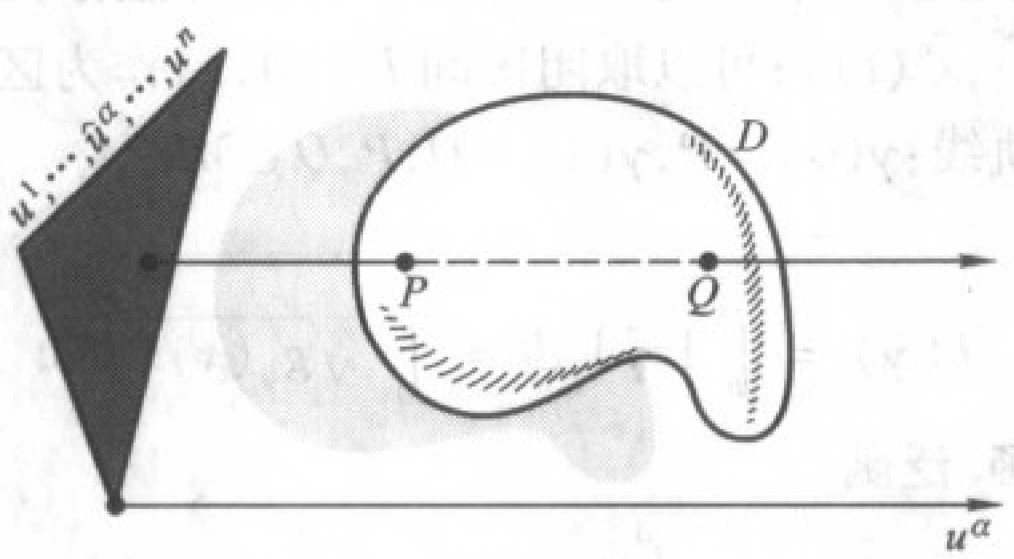


图 7.7

$$\int_D \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right)\eta^i d\sigma^k$$

$$= \int_{u^1\ldots\hat{u}^\alpha\ldots u^k}\cdots\int\left[\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}(Q)\eta^i(Q) - \frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}(P)\eta^i(P)\right] d\sigma^{k-1} \equiv 0,$$

这是因为 $\eta^i(P) = \eta^i(Q) = 0, P, Q\in\partial D$ 的缘故. 于是

$$\delta J = \varepsilon\int_D \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right)\right]\eta^i d\sigma^k + \int_D o(\varepsilon)d\sigma^k.$$

由此,因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_D o(\varepsilon)d\sigma^k = 0$,所以

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\eta}}J[f] = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right)\right]\eta^i d\sigma^k.$$

设 f_0 是 J 的稳定函数. 那么对任意的函数 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}\mid_{\partial D}=0)$ 满足等式

$$\int_D \sum_{i=1}^{n}\eta^i\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right)\right] d\sigma^k \equiv 0.$$

从分析教程中知道,上式就意味着

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{u^\alpha}}\right) = 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

此微分方程组称为**泛函 $J[f]$ 的 Euler 方程**. 由此证明了重要的定理.

定理 1 函数 $f_0 \in F$ 为 $J[f]$ 的极值(稳定)函数的充要条件是它满足 Euler 方程.

7.2 测地线的极值性

我们定义测地线是这样的轨线:沿着轨线平行移动保持轨线的速度场不变. 在黎曼流形的情形下,还有一个重要的特性,这个特性同样可以作为测地线的定义. 原来,测地线是"像"长度泛函那样的所谓演算泛函的极值轨线.

设 M^n 是具有度量 g_{ij} 的黎曼流形,$x^1,\cdots,x^n$ 是局部坐标;轨线 $\gamma(t)$ 可以这样给出:$\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$;可以取闭区间 $I=[0,1]$ 作为区域 D. 我们考察具有固定始点和终点的轨线:$\gamma(0)=P,\gamma(1)=Q,P,Q\in M^n$.

定义 1 泛函

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| \, dt = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}dt$$

称为**轨线的长度泛函**. 泛函

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt = \int_0^1 g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt$$

称为**轨线 $\gamma(t)$ 的演算泛函**.

引理 1 不等式 $L^2 \leqslant E$ 成立.

证明 对函数 $f(t)\equiv 1, g(t)=|\dot{\gamma}(t)|$ 应用有名的 Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^1 fg dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2 dt\right)\left(\int_0^1 g^2 dt\right),$$

得到 $(L(\gamma))^2 \leqslant E(\gamma)$,而且仅在 $g(t)$ 是常数函数时等式成立,即当且仅当参数 t 与弧长成比例时等式成立. 引理证毕.

我们来考察泛函 E 和 L 的极值.

定理 1 与弧长 S 成比例的 t 为参数的测地轨线 $\gamma(t)$ 是演算泛函 $E(\gamma)$ 的极值函数. 若初始点 P 的初始条件 $|\dot{\gamma}(0)|=1$,则参数 t 唯一地确定并且是自然参数,即与弧长一致.

证明 这里,我们考察参数形式的轨线,即两条相同的曲线,但具有不同的参数,就看作不同曲线. 由 7.1 节的定理 1,泛函 $E(\gamma)$ 的极值满足 Euler 方程,现在的情况下为

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

Lagrange L 等于 $L(x^i,\dot{x}^j)=g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j$. 通过计算,得到

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j;\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}=2g_{kj}\dot{x}^j;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)=2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^j+2g_{kj}\ddot{x}^j;$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j-2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j-2g_{kj}\ddot{x}^j=0;$$

$$g_{kj}\ddot{x}^j+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j\right)=0;$$

$$\ddot{x}^\alpha+\frac{1}{2}g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j=0;$$

即 $\ddot{x}^\alpha+\Gamma^\alpha_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j=0$. 于是 Euler 方程与黎曼联络的测地线一致. 定理证毕.

泛函 $E(\gamma)$ 的极值取决于作为参数形式轨线的 Euler 方程. 如果在测地线上作变换，那么一般说来，这个轨线不再是测地线.

定理 2 由测地轨线用任何参数的光滑变换所得到的光滑轨线 $\gamma(t)$ 都是泛函 $L(\gamma)$ 的极值函数. 特别，泛函 $E(\gamma)$ 的任何极值（参数形式的测地线）都是 $L(\gamma)$ 的极值，但反过来不成立.

证明 考察关于 $L(\gamma)$ 的 Euler 方程. Lagrange L 具有形式 $L(x,\dot{x})=\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$. 我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right)=0.$$

设 $\gamma(t)$ 是这组方程的解. 因为 $\gamma(t)$ 是光滑曲线，所以在其上可以引进自然参数 $t=s$. 这时，$|\dot{\gamma}(s)|=1$；于是，Euler 方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)\right)=0,$$

由定理 1，这些方程与测地线的方程一致. 于是，如果在任何 $L(\gamma)$ 的极值上引进自然参数，就得到测地线. 相反，设 $\gamma(s)$ 是 M^n 上的任意测地线；由前面所述，它是 $L(\gamma)$ 的极值. 设 $s=s(t)$ 是 $\gamma(s)$ 上的任意的光滑参数变换；那么，因为在参数作光滑变换时弧长不变，从而 $L(\gamma(s))=L(\gamma(s(t)))$，于是 $\gamma(s(t))$ 仍是 L 的极值. 定理证毕.

测地线是两个泛函 L 和 E 的局部极小. 换句话说，如果考察测地线 γ 的小的摄动 $\boldsymbol{\eta}$，这里 $\boldsymbol{\eta}$ 的支集同样是小的，那么新的轨线 $\gamma+\eta$ 将具有不少于 γ 的长度. 我们来更确切地阐述这个问题. 考察紧致黎曼流形 M^n；根据第五章的结果，存在 $\varepsilon>0$，对半径为 ε 的球 D^n_ε 中任意一对点 P,Q，有唯一的一条全部都在这个球中的测地线联结这两点.

定理 3 设 D^n_ε 是上面所指的球，并设 $\gamma:[0,1]\to M^n$ 是联结 D^n_ε 中两点长度小于 ε 的测地线；设 $\omega:[0,1]\to M^n$ 是任意的联结这两点的另外的光滑道路的弧（道

路也可以是取逐段光滑的). 那么, $L(\omega)\geqslant L(\gamma)$, 而且等号仅当点集 $\gamma[0,1]$ 和 $\omega[0,1]$ 一致时成立(即当这两条道路作为 M^n 的光滑曲线而重合). 在这个意义下, 测地线 γ 是联结 P 和 Q 的最短道路.

我们略去定理的证明.

推论 1　设 $\omega:[0,\varepsilon]\to M^n$ 是光滑轨线, 以自然参数为参数, 并设从 $P_0=\omega(0)$ 到 $\omega(\varepsilon)$ 的长不超过任何其他从 P_0 到 $\omega(\varepsilon)$ 的道路的长. 则 ω 是测地线.

结论可从定理 3 立即得到.

定义 2　测地线 $\gamma:[a,b]\to M^n$, 如果它不长于任何联结它的端点 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的光滑道路, 则称 γ 是**极小的**.

根据定理 3, 任何足够小的测地线段是极小的. 同时, 长的测地线可能不是极小的. 例如, 我们以前已经证明了球面 S^2 的赤道是测地线. 考察它的在图 7.8 中所指出的一段 SNP. 很明显, 测地线 SNP 不是极小的, 因为 $P\alpha S$ 较 SNP 短.

联结"较远的"两点 P 和 Q 的极小测地线可能不是唯一的. 例如, 二维球面的南极和北极, 可用无限多条极小测地——子午线——联结.

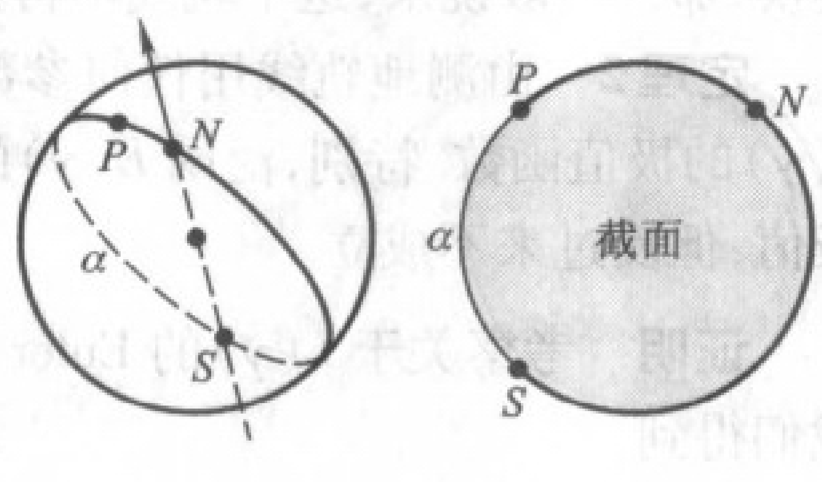


图 7.8

作为定理 3 的推论, 我们来指出在不计算 Christoffel 记号时, 如何找出 n(n 是任意的)维球面 S^n 上的所有测地线.

推论 2　标准度量的球面 S^n, 所有的赤道(即 S^n 与过球心的二维平面的平面截线)是测地线, 并且只有这些测地线.

证明　考察任意的与球面 S^n 交于赤道 γ 的二维平面 $\mathbf{R}^2$. 设 g 是保持 $\mathbf{R}^2$ 不变的 $\mathbf{R}^n$ 中的反射. 这时, 有等长 $g:S^n\to S^n$, 它的不动点集合正好与赤道 γ 重合. 设 P 和 Q 是 γ 上足够邻近的两点, 可用唯一的极小测地线 ω 联结它们(参看定理 3). 因为 g 是等长, 所以通过相同的两点 P 和 Q 的曲线 $g(\omega)$ 同样是联结 P 和 Q 的测地线; 因此, $\omega=g(\omega)$, 即 $\omega=\gamma$ 是测地线. 所以证明与二维的情形一样, 没有任何其他的测地线: 过球面 S^n 的任何点, 在任何方向的测地线通过赤道. 推论证毕.

类似地可以证明, 在旋转曲面上, 任何经线都是测地线(但是, 这里有另外的测地线).

现在, 考察紧致的黎曼流形, 并设 P 和 Q 是任意两点; 用 $\Omega(P,Q)$ 表示所有联结 P 和 Q 的光滑曲线 γ 的空间. 在此空间上定义了两个泛函 E 和 L(参看上面所述). 我们定义 P 和 Q 之间的距离 $\rho(P,Q)$ 为联结这两点的光滑曲线长的下确界.

命题 1　设 P 和 Q 是流形上两个足够邻近的点, 相互之间的距离为 d, 则演算泛函 $E:\Omega(P,Q)\to\mathbf{R}$, d^2 在联结点 P 和 Q 的极小测地线上达到绝对值的极小值.

证明　设 γ 是极小测地线, $\gamma(0)=P$, $\gamma(1)=Q$, 根据引理 1, $E(\gamma)=L^2(\gamma)\leqslant L^2(\omega)\leqslant E(\omega)$, 这里的 ω 是 P 到 Q 的光滑曲线. 等式 $L^2(\omega)=L^2(\gamma)$ 仅在 ω 也是

极小测地线(也可能,换一个参数,精确到成比例的变换)时成立. 同时,等式 $L^2(\omega)=E(\omega)$ 仅当参数与弧长成比例时成立. 由此,$E(\gamma)<E(\omega)$ 当 ω 不是极小测地线时都成立. 命题证毕.

7.3 极小曲面

在第四章我们已经熟悉了极小二维曲面,即它的平均曲率 H 等于0. 它们是面积泛函的极值.

考察 $n-1$ 维体积泛函,它定义在紧致的超曲面上,这个超曲面以光滑函数 $x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 的图形表出,定义区域为 $\mathbf{R}^{n-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 中的区域 D. 设 D 有光滑的境界 ∂D,且是有界的(图7.9). 从第五章中已经知道,$n-1$ 维的体积可表示为

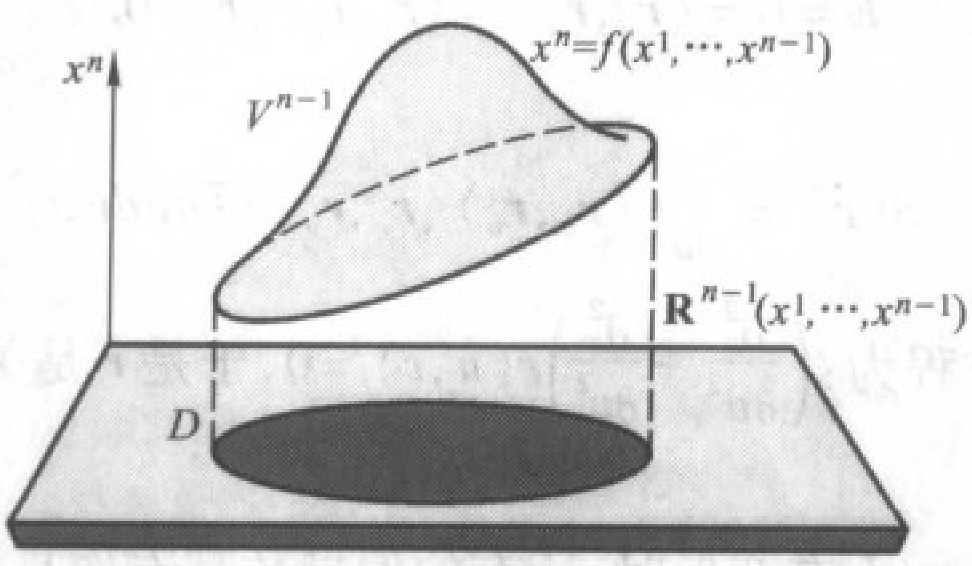


图7.9

$$\mathrm{Vol}(V^{n-1})=\int_D\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2}\,dx^1\cdots dx^{n-1},$$

其中 $f_{x^i}=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. 因为 Lagrange L 有形式

$$L(f_{x^1},\cdots,f_{x^{n-1}})=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(f_{x^i})^2},$$

所以 Euler 方程为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=0.$$

考察超曲面 V^{n-1},它是 $n-1$ 维体积泛函的极值. 因为体积是数量,它不依赖于曲面上的坐标的选择,所以可以选择适当的坐标. 设 $P\in V^{n-1}$,假设 $\mathbf{R}^{n-1}(x^1,\cdots,x^{n-1})=T_PV^{n-1}$,即取具有笛卡儿坐标的切平面作为坐标平面;把 V^{n-1} 局部地表示为函数 $x^n=f(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 图形.

定理1 超曲面 $V^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$,当且仅当它的平均曲率恒等于0时,是 $n-1$ 维体积泛函的极值.

证明　我们对 $n=3$ 时的情形进行演算，因为对任意的 n 时，演算可类似地进行. 对 $M^2\subset\mathbf{R}^3$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0.$$

微分后，得

$$f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)=0.$$

从第四章知道，这个方程与方程 $H\equiv0$ 是一致的.

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 M^2，由 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 给出. 这时面积泛函表示为（参看第五章）$S[\boldsymbol{r}]=\int_{D(u,v)}\sqrt{EG-F^2}dudv$. 设 (u,v) 是共形参数，即在此参数下，在 M^2 上的度量有形式

$$E=G=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle=\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle;F=0.$$

于是

$$S[\boldsymbol{r}]=\int_D(\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle)^{\frac{1}{2}}dudv.$$

直接计算，知 Euler 方程为：$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\boldsymbol{r}(u,v)=0$，于是 $\boldsymbol{r}$ 是关于坐标 (u,v) 调和的向量函数.

我们说明，Lagrange L 在变形时，所有的偏导数都看作是独立的.

考察圆盘 $D^2(u,v)$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的光滑映射的无限维空间 F. 在 F 上定义了非线性泛函 $S[\boldsymbol{r}]$；它的极值"点"（即向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$）可叙述如下：

定理 2　平均曲率等于 0 的向量 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是 $S[\boldsymbol{r}]$ 的极值向量，并且也仅仅这些向量是它的极值向量.

这个定理可由定理 1 得到. 现在，除 $S[\boldsymbol{r}]$ 外，还有一个泛函（Dirichlet）$D[\boldsymbol{r}]=\frac{1}{2}\int_{D(u,v)}(E+G)dudv$. 我们来比较泛函 D 和 S 的极值"点".

定理 3　关于 (u,v) 是调和的向量，即 $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\boldsymbol{r}(u,v)=0$ 的向量 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是 Dirichlet 泛函的极值向量，并且它的极值向量也仅有这些.

证明　Euler 方程为 $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_v}\right)=0$，这里的 $L=\langle\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle+\langle\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle$，即 $L=x_u^2+x_v^2+y_u^2+y_v^2+z_u^2+z_v^2$，亦即 $\Delta(\boldsymbol{r})=0$，这里 $\Delta=\frac{\partial}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial v^2}$. 定理证毕.

坐标 (u,v) 对某个向径可能是调和的，但对用这些向量表示的曲面上的诱导度量不是共形的. 现在，我们考察特殊的调和曲面，在此曲面上，调和坐标同时又是共形的，即 $E=G,F=0$. 这时，这个曲面是极小的.

我们简明陈述下面的定理而不加证明.

定理 4 设 $M^2\subset\mathbf{R}^3$ 是极小曲面，即有零平均曲率. 那么，当它的具有充分小的支集的任何光滑的足够小的摄动都不减少曲面的面积.

7.4 变分法和辛几何

设 T_*M^n 是流形 M^n 的切丛，即 $2n$ 维光滑流形，$\{(x,\boldsymbol{a})\}$，$x\in M^n$，$\boldsymbol{a}\in T_xM^n$，是它的点. 设 $P,Q\in M^n$，$\Omega(P,Q)$ 是联结 P,Q 的所有光滑曲线的空间. 在 M^n 上引进了局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$，在此坐标中，轨线表示为 $\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$，$\gamma(0)=P$，$\gamma(1)=Q$；我们考察泛函 $I[\gamma]=\int_0^1 L(x,\dot{x})dt$，这里的 L 是两组变数的光滑函数，即 $L(x,\boldsymbol{a})$ 是 T_*M^n 上的函数.

定义 1 具有下列分量的共变向量 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}$ 称为冲量 $p=(p_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$. 函数 $E(x,\dot{x})=\dot{x}^ip_i-L(x,\dot{x})$ 称为能量 E.

可把能量看作 T_*M^n 上的函数，即 $E(x,\boldsymbol{a})=a^ip_i-L(x,\boldsymbol{a})$. 重要的例子：$L(x,\dot{x})=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$；由此，$p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}=\alpha g_{ij}\dot{x}^j$，即 p 是共变向量，它是速度向量 $\boldsymbol{a}=\dot{x}$ 关于度量 g_{ij} 的对偶的向量. 能量 E 具有形式

$$E(x,\dot{x})=\dot{x}^i\alpha g_{ij}\dot{x}^j-g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

即为"动能".

设 $\mathscr{G}$ 是李群，光滑地作用在 M^n 上（即每一个元素 $g\in\mathscr{G}$ 都可用 M^n 上的微分同胚来表示）；我们考察下面的例：$\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$ 是实直线（对加法构成群）. 这个作用（对 $\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$）产生了 M^n 上向量场：$\boldsymbol{X}(x_0)=\dfrac{d}{dt}g_t(x_0)\Big|_{t=0}$，这里，轨道 $\mathscr{G}(x_0)=g_t(x_0)$；$g_0(x_0)=x_0$. $\mathscr{G}$ 在 M^n 上的作用产生了 $\mathscr{G}$ 在 T_*M^n 上的作用，其公式为 g_*：$(x,\boldsymbol{a})\to(g(x),dg_x(\boldsymbol{a}))$.

定义 2 如果 $\mathscr{G}$ 作用在 T_*M^n 上，函数 $L(x,\boldsymbol{a})$ 变为自身，即

$$L(g(x);dg(\boldsymbol{a}))\equiv L(x,\boldsymbol{a});(x,\boldsymbol{a})\in T_*M^n,$$

则称 Lagrange 泛函 $L(x,\boldsymbol{a})$ 在 $\mathscr{G}$ 作用下保持不变（关于 $\mathscr{G}$ 是不变的）.

保持 L 的条件为 $\dfrac{dL}{dt}=0$，经过微分，得到

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}+\frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{da^i}{dt}=0;\frac{dx^i}{dt}=X^i(x)$$

（参看上面所述）. 我们求出 $\dfrac{da^i}{dt}$. 考察 $\boldsymbol{a}$ 和切轨线 $\varphi(\tau)=(x^i(\tau))$，使 $a^i=\dfrac{dx^i}{d\tau}\Big|_{\tau=0}$. 在沿 $g_t(x)$ 有小的位移 Δt 时，函数 x^i 变为函数 $x^i+X^i\Delta t$（忽略掉阶数高于 1 的小

量）. 由此得到

$$\frac{dx^i}{d\tau}\to\frac{dx^i}{d\tau}+\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\Delta t\frac{dx^k}{dt},$$

即 $a^i\to a^i+\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k\Delta t$，即$\frac{da^i}{dt}=\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k$. 其次，$g_{\Delta t}(x^i)=\{x^i+X^i\Delta t+\cdots\}$，

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{\Delta t}(x^i))\cong\left(\delta^i_k+\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\Delta t\right)=J^i_k;$$

$J=(J^i_k)$是 Jacobi 矩阵. 由此

$$a^j\to J^j_ka^k=a^j+\frac{\partial X^j}{\partial x^k}a^k\Delta t.$$

于是

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial x^i}X^i+\frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k\equiv 0,$$

我们就证明了下面命题.

命题 1　在群 $\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$ 的作用下 Lagrange $L(x,\boldsymbol{a})$保持不变的解析条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}X^i+\frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}a^k=0,$$

这里，$(x,\boldsymbol{a})$是独立变量，而 $\boldsymbol{X}$ 是群 $\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$ 作用的速度向量场.

我们引进沿着泛函 J 的极值所谓的冲量射影保持法则. 考察$\int_0^1 L(x,\dot{x})dt=J[\gamma]$，并设 γ_0 是 $J[\gamma]$ 的极值，即 Euler 方程组$\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)=0$ 的解，这里用τ表示沿着极值的时间. 如果“点”表示关于τ的微分，那么，Euler 方程可改写为：$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\dot{p}_i$，这里 p 是冲量. 我们考察缩并$f(\tau)=(p,\boldsymbol{X})=x^ip_i$，这里$f(\tau)$是沿 $\gamma_0(\tau)$ 的光滑函数. $f(\tau)$ 可以理解为在向量 $\boldsymbol{X}$ 上的共变向量 p 的值：$f(\tau)=p(\boldsymbol{X})$.

定理 1　存在恒等式：$(f(\tau))^\circ\equiv 0$，即$(p,\boldsymbol{X})^\circ\equiv 0$.

证明　由命题 1，我们有

$$\begin{aligned}(X^ip_i)^\circ&=\dot{X}^ip_i+X^i\dot{p}_i=X^i\frac{\partial L}{\partial x^i}+\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial a^i}\frac{dx^k}{d\tau}\\&=\frac{\partial L}{\partial x^i}X^i+\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial a^i}a^k=0,\end{aligned}$$

这就是所要求的. 定理证毕.

考察我们的例子：$L(x,\dot{x})=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$，这时沿着 $\gamma_0(\tau)$，有 $p_i=2g_{ij}\dot{x}^j$，即 $X^ip_i=2g_{ij}X^i\dot{x}^j=\alpha<\boldsymbol{X},\dot{\gamma}_0>=$常数. 对此 Lagrange，极值是测地线（参看 7.2 节）；特别，沿着 $\gamma_0(\tau)$有$|\dot{\gamma}_0|=$常数；由此，$|\boldsymbol{X}|\cos\alpha(\tau)=$常数，这里 $\alpha(\tau)$是向量 $\boldsymbol{X}$ 和$\dot{\gamma}_0$ 之间的角（在度量 g_{ij}下测量）.

我们利用这个结果来求 $\mathbf{R}^3$ 中旋转曲面 M^2 上的测地线问题. 设 $r(z)$ 是光滑函数,它是旋转曲面的母线,即曲面是由曲线 $y=r(z)$ 绕 Oz 轴旋转而成(图7.10). 设 ω 是常数的旋转速度,这时在 M^2 上产生了群 $\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$ 的作用 $r\omega t$. 此时作用的速度场 X 有模 $|X|=r\omega$. 由上面的证明,对 M^2 上任意的测地线 $\gamma_0(\tau)$,满足恒等式:$r(z)\cos\alpha(z)=C=$ 常数. 于是,证明了下面的命题.

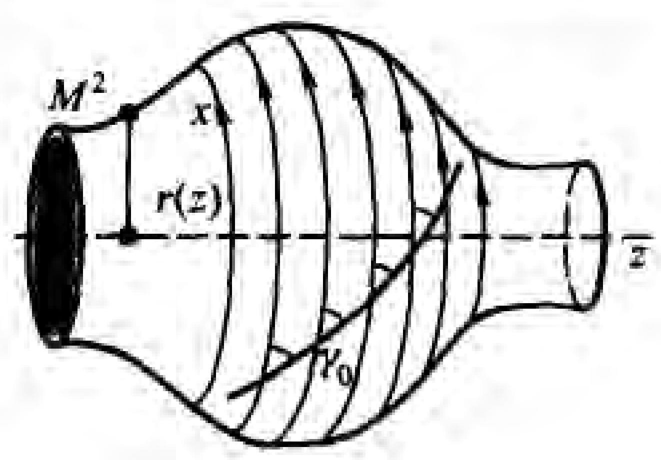


图 7.10

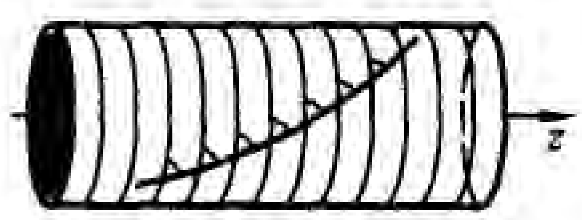


图 7.11

命题 2 在 $\mathbf{R}^3$ 中,母线为 $r(z)$ 的旋转曲面 M^2 上,沿着 M^2 的任何测地线 $\gamma_0(\tau)$,满足恒等式:$r(z)\cos\alpha(z)=$ 常数.

考察例子,设 $r(z)=$ 常数;这时旋转曲面是圆柱面,并且其上的测地线是把欧氏平面卷在圆柱上时,直线的像(图 7.11).

设 $r(z)$ 确定了 S^2(图 7.12). 测地线是赤道.

条件 $r(z)\cos\alpha(z)=$ 常数是测地轨线的必要条件,但不是充分的. 事实上,若 $\gamma(\tau)$ 是群 $\mathscr{G}$ 作用的轨道,那么 $\alpha(\tau)=0$,即 $(p,X)=|X|\,|p|=$ 常数(在旋转曲面上),但绝非总是测地线. 例如,正圆锥和它绕轴的旋转(图 7.13). 我们已经知道,锥面上的所有测地线是在把一片欧氏平面卷为锥面时,直线的像;很明显,圆周在锥面上不是测地线.

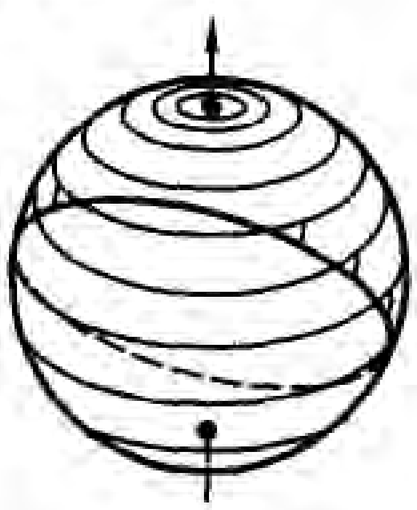


图 7.12

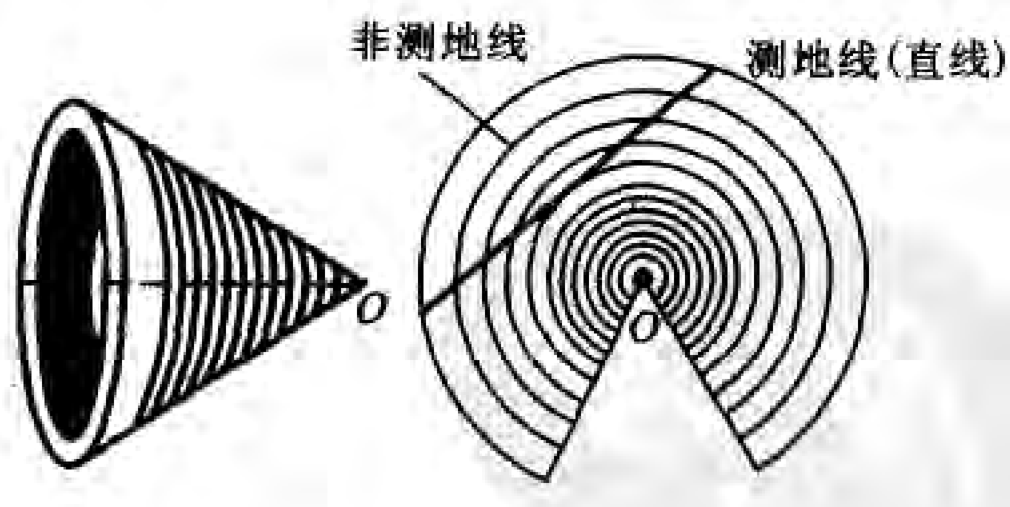


图 7.13

因为沿着 $\mathscr{G}=\mathbf{R}^1$ 作用的轨道有 $\dfrac{\partial L}{dt}\equiv 0$(对不变的 Lagrange),所以沿着 $\mathscr{R}(x)$ 的轨道局部地可调整坐标 x^n,这时 $(p,X)^\circ\equiv 0$,等价于 $p_n=0$,p_n 是冲量按坐标 x^n 的射影;换句话说,可以认为,冲量 p 不依赖于坐标 x^n;函数 L 也不依赖于这个坐标.

我们来证明所谓的沿着极小"点"能量保持不变的规则. 设 $L(x,\boldsymbol{a})$ 是 Lagrange (关于任何一个群的作用已经不必要是不变的), 并设 $\gamma_0(\tau)$ 是泛函 $J[\gamma]=\int L(x,\dot{x})d\tau$ 的极值. 考察能量 $E=\dot{x}^i p_i - L; p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$, 设 $L=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j-U(x)$, 其中函数 $U(x)$ 称为势.

定理 2 沿着泛函 $J[\gamma]$ 的极值 $\gamma_0(\tau)$, 有恒等式 $\frac{dE}{d\tau}\equiv 0$.

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{d\tau} &= (p_i a^i - L)^{\circ}_{\tau} \\
&= \dot{p}_i a^i + p_i \dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^i}a^i + \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i}a^i - \frac{\partial L}{\partial a^i}\dot{a}^i \equiv 0,
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

这是由于 Euler 方程, $\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial x^i}$, 按定义 $p_i=\frac{\partial L}{\partial a^i}$. 定理证毕.

我们引入流形上力学的 Hamilton 量的最简单的概念.

设 T_*M^n 是流形上的切丛, 配置了坐标 $(x,\boldsymbol{a})$, L 是 T_*M^n 上的 Lagrange 泛函.

定义 3 Lagrange 泛函 $L(x,\boldsymbol{a})$, 如果方程

$$
\boldsymbol{p}=\frac{\partial L(x,\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\left(\text{即 } p_i=\frac{\partial L(x,\boldsymbol{a})}{\partial a^i}, 1\leqslant i\leqslant n\right)
$$

对任何 $x\in M^n$ 有唯一解 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,p)$, 则称 $L(x,\boldsymbol{a})$ 是非退化的.

与 T_*M^n 同时, 我们同样考察切丛 T^*M^n, 即 $2n$ 维光滑流形, (x,p) 是它的点, 这里 $p\in T_x^*M$, 即 p 是共变向量, 考察能量

$$
E(x,\boldsymbol{a})=p_i a^i - L(x,\boldsymbol{a})=\frac{\partial L(x,\boldsymbol{a})}{\partial a^i}a^i - L,
$$

其中 $p=p(x,\boldsymbol{a})$.

我们表示 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,p)$ 并代入 E 中; 得到 $E\to E(x,\boldsymbol{a}(x,p))$. 获得了某个函数 $E(x,\boldsymbol{a}(x,p))=H(x,p)$, 称为 Hamilton 量. 它具有形式 $H=p_i a^i(x,p)-L(x,\boldsymbol{a}(x,p))$, 即 $L(x,\boldsymbol{a}(x,p))=p_i a^i(x,p)-H(x,p)$. 设 $\boldsymbol{\gamma}(t)\subset M^n$ 是光滑轨线; 这时 $(x,\dot{x})\in T_*M^n$, 其中 $\dot{x}=\dot{x}(t)$, $x=x(t)$, 即 $\gamma(t)$ 在 T_*M^n 上产生轨线: $(x(t),\dot{x}(t))=\Gamma(t)$. 考察 T_*M^n 中轨线上的 Lagrange $L(x,\boldsymbol{a})$.

我们指出, T_*M^n 和 T^*M^n 是成微分同胚的. 事实上, 设在 M^n 上给出度量 g_{ij}, 则有典型的等同 $\varphi: T_*M^n\to T^*M^n$; $\varphi(\{x^i\},\{a^\alpha\})=(\{x^i\},\{g_{\beta\alpha}a^\alpha\})\in T^*M^n$. 除 T_*M^n 与 T^*M^n 的这个等同外, 我们在非退化的 Lagrange $L(x,\boldsymbol{a})$ 问题中, 还有另外的等同. 事实上, 方程 $p=\frac{\partial L(x,\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}$ 有唯一的解(在固定 x 时) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,p)$, 所以我们

可使每一个$(x,\boldsymbol{a})$与(x,p)相对应,这里$p=\dfrac{\partial L(x,\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}$. 我们考察的正是这个$T_*M^n$和$T^*M^n$作为微分同胚的等同. 特别,当$L(x,\boldsymbol{a})=g_{ij}a^ia^j$时,我们有$p_i=2g_{ik}a^k$,即借助于这样的 Lagrange 的等同与"黎曼等同"是一致的(参看前面所述)(图7.14).

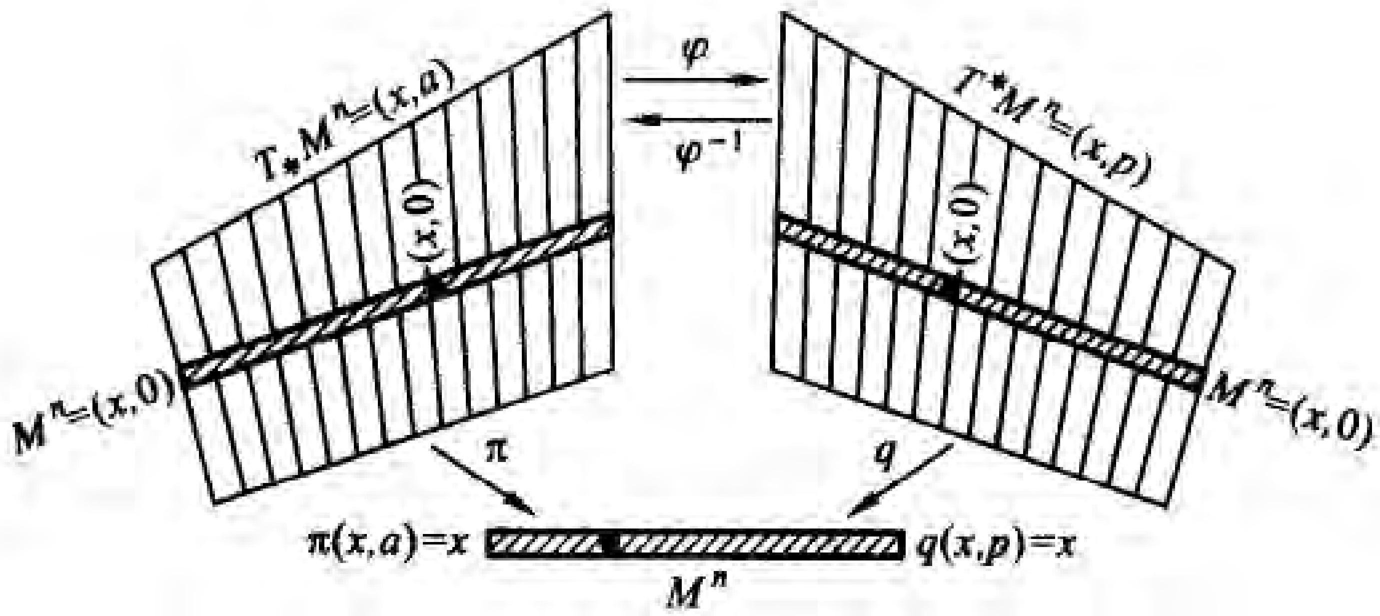


图 7.14

我们考察泛函$I(\alpha)=\int_R^S L(x(t),\boldsymbol{a}(t))dt$的极值问题,这里$L(x,\boldsymbol{a})$是在$T_*M^n$的所有光滑轨线$\alpha(t)$上考察的,而点$R$和$S$是$T_*M^n$上的两个固定点,即$R(x_0,\boldsymbol{a}_0)$,$S(y_0,\boldsymbol{b}_0)$(图7.15). 考虑对此泛函的 Euler 方程. 我们考虑点R和S不改变时的变分. 在T_*M^n上的 Euler 方程为$\dfrac{\partial L}{\partial x^i}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial a^i}\right)$. 将它用$T^*M^n$的术语表出,即作变换$(x,p)\to(x,\boldsymbol{a})$,此变换可借助于上面的微分同胚写出,而微分同胚可根据 Lagrange L 作出. 我们有

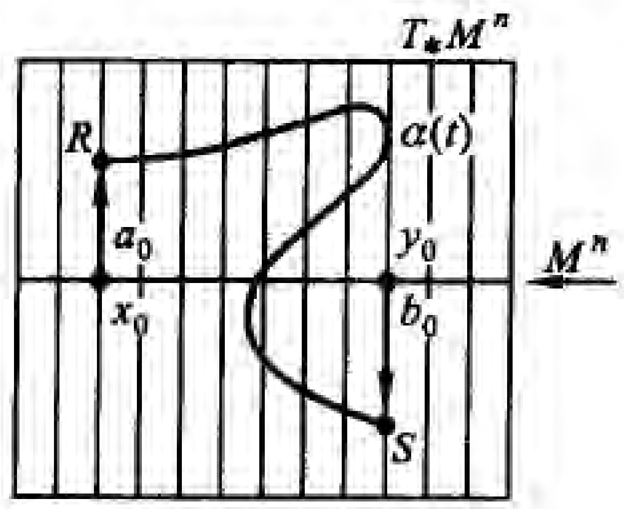


图 7.15

$$L(x,\boldsymbol{a}(x,p))=p_ia^i(x,p)-H(x,p);$$

$$p_i=\frac{\partial}{\partial a^i}L(x,\boldsymbol{a}(x,p)).$$

我们指出,$\dfrac{\partial}{\partial p_i}L(x,\boldsymbol{a}(x,p))=0$,因为冲量$p$不明显地进入$L(x,\boldsymbol{a})$中,而对变分的 Euler 方程的工作时,仅根据明显地进入到 Lagrange 函数中的量进行的. 于是

$$0=\frac{\partial}{\partial p_i}L(x,\boldsymbol{a}(x,p))\equiv a^i(x,p)-\frac{\partial}{\partial p_i}H(x,p),$$

即$a^i(x,p)=\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}$. 由此,

$$\int_A^B L(x,\boldsymbol{a}(x,p))dt=\int_A^B[p_ia^i(x,p)-H(x,p)]dt$$

$$= \int_A^B \left[p_i \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i} - H(x,p) \right] dt = J[\omega(t)],$$

其中 $\omega(t) \in T^*M^n$, $\omega(t) = (x(t), p(t))$; $\omega(0) = A$, $\omega(1) = B$（参看图 7.16）. 写出泛函 $J[\omega(t)]$ 在 T^*M^n 上的 Euler 方程. 设 $\omega_0(t) = (x(t), p(t))$ 是泛函 J 的极值. 上面已经规定了 $a^\alpha = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_\alpha}$，但因为 $a^\alpha = x^\alpha$（沿着极值），所以 $\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_\alpha}$（沿着极值）. 其次

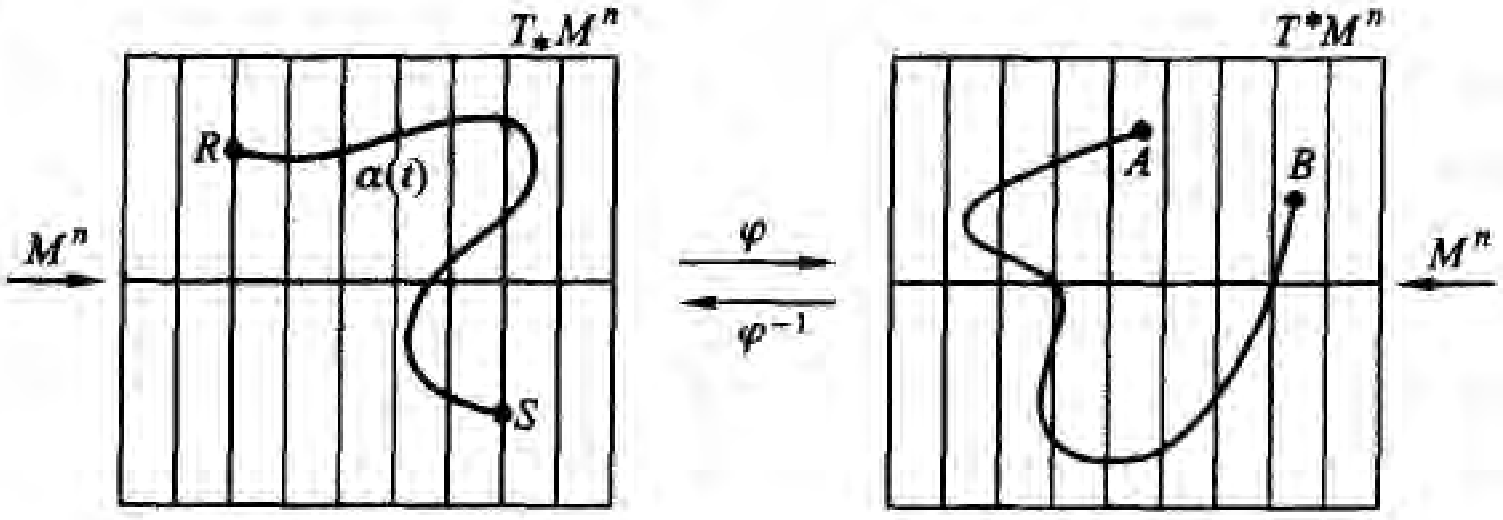


图 7.16

$$J[\omega] = \int_A^B (p_i a^i - H) dt = \int_A^B L(x, \boldsymbol{a}(x,p)) dt.$$

Euler 方程具有形式：$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial a^i}\right)$，但因为 $\frac{\partial L}{\partial a^i} = p_i$，所以 $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}$. 还有 $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i - H(x,p)) = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$，这是因为 $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i) = 0$. 我们指出，坐标 x 和 $\boldsymbol{a}$ 被看作独立的坐标，因此 $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} = 0$. 因为变量 x^i 在和式 $a^i p_i$ 中不明显地出现，所以 $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^i p_i) = 0$. 由此，$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$. 于是我们证明了下面的重要的定理.

定理 3　在切丛 T^*M^n 的坐标 (x,p) 中，泛函 $J[\omega] = \int_A^B L(x, \boldsymbol{a}(x,p)) dt$ 的 Euler方程写成“Hamilton 形式”：$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}$; $\dot{p}_i = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$（Hamilton 方程）.

我们研究 T^*M^n 上的 Hamilton 方程. 它们在 T^*M^n 上确定了光滑向量场：$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}$; $\dot{p}_i = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}$. 这个场与 M^n 上的共变向量场 grad$H$ 紧密相关. 事实上，考察 T^*M^n 上的二阶外微分形式 $\omega^{(2)} = dp_i \wedge dx^i$. 它在 $T_{(x,p)}(T^*M^n)$ 和 $T^*_{(x,p)}(T^*M^n)$ 中确定了反对称的、非退化的数量积. 于是，这个数量积给出了切空间 $T_{(x,p)}(T^*M^n)$，和切空间 $T^*_{(x,p)}(T^*M^n)$ 的等同. 考察流 grad$H(x,p)$，它具有坐标 $\left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}; \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}\right)$；这时，流的对偶关于这个数量积有形式：$\left(\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i};\right.$

$-\dfrac{\partial H(x,p)}{\partial x^i}\Big)$，即与我们在定理3中得到的Hamilton流一致. 于是，可定义Hamilton场为流，它与Hamilton函数$H(x,p)$梯度，与T^*M^n上的二阶外形式相对偶.

考察偶数维的黎曼流形M^{2n}；例如，流形$T^*M^n \cong T_*M^n$. 设$\omega^{(2)}=\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$是$M^{2n}$上的非退化的2阶外形式，它给出了反对称数量积，这时，在M^{2n}对任何光滑函数$f(x)$产生"反对称梯度"sgrad$f(x)$.

定义4 由关系式$\omega(\boldsymbol{Y},\text{sgard}f)=\boldsymbol{Y}(f)$唯一地确定的向量场$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}$跑遍$M^{2n}$上的所有光滑向量场的集合，而$\boldsymbol{Y}(f)$是算子$\boldsymbol{Y}$在光滑函数$f$上的值，称$\boldsymbol{Y}(f)$为光滑函数$f$(关于数量积$\omega$)的**反对称梯度**sgrad$f$.

sgrad$f$的定义的唯一性可由ω的非退化性得到.

定义5 光滑流形M^{2n}如果在它上面给出了二阶外微分形式ω，满足：(1) ω是非退化的；(2) $d\omega=0$，即形式ω是闭的. 那么就称M^{2n}是**辛流形**.

就是说，在辛流形上存在特殊形式的图册，在此图册下，形式ω(有时称为"辛结构")采取规范形式；也就是说，对任何点$P\in M^{2n}$，存在邻域$U(P)$和在其上的坐标$(p^1,\cdots,p^n;q^1,\cdots,q^n)$，在此坐标下，$\omega$为$\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}dp^i\wedge dq^i$. 这个坐标称为**辛坐标**. 这些坐标的存在性构成了周知的Darboux定理的内容. 我们不证明此定理.

辛流形的重要例子：$M^{2n}=\mathbf{R}^{2n}$；$p^1,\cdots,p^n,q^1,\cdots,q^n$是$\mathbf{R}^{2n}$的笛卡儿坐标，且$\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}dp^i\wedge dq^i$. 因为这个形式的系数都是常数$\omega_{ij}^2$，所以$d\omega^{(2)}\equiv0$，即形式是闭的. 它的非退化性是显然的. 光滑的二维定向流形是辛流形的另外的重要例子. 取关于黎曼度量的体积的二阶外微分形式，即在局部坐标(x,y)中给出的形式：$\omega=\sqrt{g}dx\wedge dy$，其中$g=\det(g_{ij})$，每一个这种流形都可以给出辛结构. ω的非退化性可由$\sqrt{g}\neq0$得到；而ω的闭性质是显然的.

定义6 在带有ω的辛流形M^{2n}上的光滑向量场X，如果它具有形式$\boldsymbol{X}=$ sgrad$H$，H是M^{2n}上的某个光滑函数，则称光滑向量场X是Hamilton **向量场**. 函数H称为Hamilton **流**.

我们求出sgard$f$的显式公式. 有：$\omega(\text{sgard}f,\boldsymbol{Y})=\omega_{ij}(\text{sgard}f)^iY^j=Y^k\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$；由此得$(\text{sgrad}f)^i=\omega^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}$，即向量sgard$f$是共变向量grad$f$的共轭(关于数量积$\omega$)向量.

设H是M^{2n}上的光滑的函数，在M^{2n}上建立了辛坐标(p^i,q^i)，即$\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}dp^i\wedge dq^i$，这时sgrad$H=\left(\dfrac{\partial H}{\partial q^i};\dfrac{-\partial H}{\partial p^i}\right)$.

Hamilton场允许用此场所产生的微分同胚的单参数群的语言作出很好的描

述. 设 $X = \mathrm{sgrad}H$ 是 Hamilton 场；$\mathscr{G}_t$是沿着这个场的积分轨线相应的位移群. 群作用在形式 ω 上,把它变为形式$(\mathscr{G}_t)^*\omega$. 如果同时点 y 变为点 $x_t(y)=\mathscr{G}_t(y)$,那么

$$\begin{aligned}(\mathscr{G}_t^*)\omega &= \omega_{ij}(x_t(y))dx_t^i(y)\wedge dx_t^j(y)\\ &= \omega_{kp}(t,y)dy^k\wedge dy^p,\end{aligned}$$

其中 $\omega_{kp}(t,y)=\omega_{ij}(x_t(y))\dfrac{\partial x_t^i(y)}{\partial y^k}\dfrac{\partial x_t^j(y)}{\partial y^p}$.

在辛流形上的向量场 X 可能不允许有 $X=\mathrm{sgard}H$ 形式的整体表示,但它可能拥有下列的重要性质:对任何点 $P\in M^{2n}$,存在点 P 的邻域 $U(P)$ 和定义在 $U(P)$ 上的函数 H_V,使 $X(v)=\mathrm{sgrad}H_U(v)$,这里的 $v\in U$. 这样的场 X 称为局部 Hamilton 场. 局部 Hamilton 函数 H_U 是对每一个邻域 U 作出的,但一般地说,不能把它们"缝成"一个定义在整个流形上的 Hamilton 函数. 由 Darboux 定理,局部 Hamilton 场的研究就归结为具有结构 $\sum_{i=1}^n dp^i\wedge dq^i$ 的 $\mathbf{R}^{2n}$中的 Hamilton 场的研究.

定理 4　辛流形 M^{2n}上的向量场 X,当且仅当单参数群 $\mathscr{G}_t$保持辛结构 ω 不变时是局部 Hamilton 场.

证明　由于 Darboux 定理,我们仅证明当 M^{2n}是 $\mathbf{R}^{2n}$具有结构 $\omega=\sum_{i=1}^n dp^i\wedge dq^i$ 时的情况就可以了.

我们证明,如果在群 $\mathscr{G}_t$的作用下,ω 保持不变,那么场 X 是局部 Hamilton 场. 于是 ω 在群 $\mathscr{G}_t$的作用下不变,就是说,形式沿着场 X 的导数等于 0,即 $0=\dfrac{d}{dt}\omega(\gamma(t))$,这里 $\gamma(t)$是 X 的积分轨线. 我们有:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\omega(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n dp^i(t)\wedge dq^i(t)\\ &= \sum_{i=1}^n\left[\frac{d(dp^i(t))}{dt}\wedge dq^i(t)-dp^i(t)\wedge\frac{d}{dt}(dq^i(t))\right]\\ &= \sum_{i=1}^n\left[d(X^i(t))\wedge dq^i(t)+dp^i(t)\wedge dY^i(t)\right],\end{aligned}$$

这里 $X=(X^i,Y^i)$,$1\leqslant i\leqslant n$. 其次:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\omega(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n\Bigg[&\left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k}+\frac{\partial Y^k}{\partial q^i}\right)dp^k\wedge dq^i+\\ &\left(\frac{\partial X^i}{\partial q^k}-\frac{\partial X^k}{\partial q^i}\right)dq^k\underset{(k<i)}{\wedge}dq^i+\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k}-\frac{\partial Y^k}{\partial p^i}\right)dp^i\underset{(i<k)}{\wedge}dp^k\Bigg]=0,\end{aligned}$$

即

$$-\frac{\partial X^i}{\partial p^k}=\frac{\partial Y^k}{\partial q^i};\quad \frac{\partial X^k}{\partial q^i}=\frac{\partial X^i}{\partial q^k};\quad \frac{\partial Y^i}{\partial p^k}=\frac{\partial Y^k}{\partial p^i}.$$

这就是说，一阶形式 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}(Y^i dp^i-X^i dq^i)$ 是闭的. 事实上，由于上面所得到的关系式

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k}-\frac{\partial Y^k}{\partial p^i}\right)dp^k \underset{(k<i)}{\wedge} dp^i+\left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^k}+\frac{\partial X^k}{\partial p^i}\right)dq^k\wedge dp^i+\left(\frac{\partial X^k}{\partial q^i}-\frac{\partial X^i}{\partial q^k}\right)dq^k\wedge dq^i\right]$$
$$=0.$$

在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上定义的一阶形式 α 的闭的性质得到，存在光滑函数 H，它的梯度等于这个形式，即 $\alpha=dH$. 实际上，H 可以以明显的形式按照下面的公式重建

$$H(x)=\int_{\gamma}\alpha=\int_{\gamma(t)}\sum_{i=1}^{n}(Y^i dp^i-X^i dq^i)=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\left(Y^i\frac{dp^i}{dt}-X^i\frac{dq^i}{dt}\right)dt,$$

其中，$\gamma(t)$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中任何光滑轨线，此轨线始于固定点，终于具有坐标 (p^i,q^i) 的变点，数 $H(x)$ 不依赖于这样的道路的选择. 对 $n=2$，我们已在第四章中证明了这个事实. 对 $n>2$，可从 Stokes 公式得到，实际上，考察两条道路 $\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_1(0)=\gamma_2(0);\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$；这时

$$\int_{\gamma_1}\alpha-\int_{\gamma_2}\alpha=\int_{\gamma_1\cup(-\gamma_2)}\alpha=\int_{\partial D^2}\alpha=\int_{D^2}\alpha=0,$$

这里 D^2 是两条轨线 γ_1 和 γ_2 所界定的任何圆盘(圆盘可以是自身相交的). 于是，构造 H 的工作就完成了. 剩下证明反过来的问题：如果 $\boldsymbol{X}$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的 Hamilton 场，那么群 $\mathscr{G}_t$ 保持 ω 不变，即 $\boldsymbol{X}(\omega)=0$. 上面所有计算的以相反的次序重述即可证得. 定理证毕.

现在，容易提出 Hamilton 流的例子. 例如，考察配置了任何黎曼度量和辛结构 $\omega=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx\wedge dy$ (参看前面)的带有 g 个柄的球面. 如何描述这个辛流形上的所有 Hamilton 流？注意，如果在沿着积分轨线场移动时任何区域 A 的体积不改变，则在 M_g^2 上的场 $\boldsymbol{X}$ 有等于 0 的散度.

推论 1 不可压缩的流是 M_g^2 上的 Hamilton 流，并且只有不可压缩的流才是 M_g^2 上的 Hamilton 流，即对此流 $\operatorname{div}\boldsymbol{X}=0$.

证明 由定理 4，我们应当写出所有保持形式 ω 的流. 因为可以取体积形式 $\omega=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx\wedge dy$ 作为这样的形式，所以 Hamilton 流，就是保持体积形式不变的场. 如我们从第四章中知道的那样，这是具有散度等于 0 的流，并且也只有这些流才具有等于 0 的散度. 推论证毕

考察 Hamilton 流的重要例子——动力系统，它描述了具有一个不动点的三维刚体的运动. 为此，应该考察 $\mathbf{R}^3$，它与所有三阶的实反对称矩阵构成的线性空间一致；设 $X\in\mathbf{R}^3$ 是这样的矩阵. 我们在 $\mathbf{R}^3$ 中给出自共轭的线性算子 $\varphi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$，它作用的公式为 $\varphi X=XI+IX$，这里的 I 是形为 $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$ 的矩阵，(λ_i) 是实数. 很明

显,矩阵 φX 是反对称的. 考察微分方程组(用矩阵形式写出)$\varphi\dot{X}=[X,\varphi X]$. 由力学中知道,具有固定点的三维刚体的运动用这些方程来描述. 我们把方程写为坐标的形式. 实际上,这时直接考察在 $\mathbf{R}^n$中的绕固定点旋转的 n 维刚体是方便的,这时方程组为 $\varphi\dot{X}=[X,\varphi X]$,其中 $\varphi:SO(n)\to SO(n)$;$SO(n)=(X:X^{\mathrm{T}}=-X)$,$\varphi X=XI+IX$,$I=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

注意到 $X=(x_{ij})$,$x_{ij}=-x_{ji}$,我们得到

$$(\varphi X)_{ij}=(\lambda_i+\lambda_j)x_{ij};\quad (\dot{X})_{ij}=\sum_k(x_{ik}(\varphi X)_{kj}-(\varphi X)_{ik}x_{kj})$$
$$=(\lambda_j-\lambda_i)\sum_k x_{ik}x_{kj};$$
$$\dot{x}_{ij}=\frac{\lambda_j-\lambda_i}{\lambda_j+\lambda_i}\sum_k x_{ik}x_{kj}.$$

在 $n=3$ 时,有

$$\dot{x}_{12}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}x_{13}x_{32};\quad \dot{x}_{13}=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}x_{12}x_{23};\quad \dot{x}_{23}=\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_2}x_{21}x_{13}.$$

设 $x_{12}=x$,$x_{13}=y$,$x_{23}=z$,得方程组:

$$\dot{x}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}yz;\ \dot{y}=\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}xz;\ \dot{z}=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}yx.$$

这个流允许两个积分:$P=x^2+y^2+z^2$;$Q=x^2(\lambda_1+\lambda_2)+y^2(\lambda_1+\lambda_3)+z^2(\lambda_2+\lambda_3)$. 事实上,这两个函数沿着流的积分轨线是常数,求出导数 $\dot{X}(P)$ 和 $\dot{X}(Q)$. 我们有

$$\dot{X}(P)=2xyz\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\lambda_1}+\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$$
$$=\frac{2xyz}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)}[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)$$
$$+(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_1)]=0;$$

$\dot{X}(Q)=2xyz(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\equiv 0$,

这就是我们所要求的. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ 以及 λ_i 两两不相同,那么这两个积分函数无关(在一般位置的点)(验证!). 于是,积分轨线是两簇曲面的交线——球面 $P=$常数和椭球面 $Q=$常数. 场 X 在曲面上画出水平线 $Q=$常数是方便的(参看图 7.17):现在我们固定任何一个球面 $P=$常数并把流 $\dot{X}$ 限制在这个球面上. 我们断言,这个流是 Hamilton 流. 事实上,证明 $\dot{X}$ 保持体



图 7.17

积形式不变,即无散度的即可. 证明流保持外围欧氏空间中的体积形式即可. 而这是很明显的,因为表示式$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$恒等于0(参看 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 的显式表示). 正如在给出的例子中所见,对描述流的几何状况来说,它的积分很有价值;在三维刚体的情形,运动方程是完全可积的,即我们指出了运动的两个积分.

考察关于 Hamilton 流的积分问题,为此,在辛流形上,对其光滑函数空间引进新的运算是有益的.

定义 7 辛流形 M^{2n} 上的两个光滑函数 f,g,由下面公式定义函数 $\{f,g\}$

$$\{f,g\}=\omega(\mathrm{sgard}f,\mathrm{sgard}g)=\omega_{ij}(\mathrm{sgard}f)^i(\mathrm{sgard}g)^j,$$

称函数 $\{f,g\}$ 为函数 f,g 的 Poisson **括号**.对运算 $f,g\to\{f,g\}$ 的显式公式为

$$\{f,g\}=\omega^{k\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha},$$

因为$(\mathrm{sgard}f)^i=\omega^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

命题 3 Poisson 括号 $f,g\to\{f,g\}$ 满足下列关系:

(1) 运算 $\{f,g\}$ 是双线性的;

(2) 运算 $\{f,g\}$ 是反对称的,即 $\{f,g\}=-\{g,f\}$;

(3) 成立 Jacobi 恒等式:

$$\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{f,\{g,h\}\}=0.$$

证明 我们对特殊情形,具有规范辛结构的 $M^{2n}=\mathbf{R}^{2n}$ 来证明这个定理. 性质(1)和(2)可由定义立即得到. 现在来证明(3). 用 L_f 表示沿着场 sgard$f$ 的微分,即 $L_f(h)=(\mathrm{sgard}f)h$. 我们断定,(3)的表示式左边是单项式的和,其每一项中都进入了三个函数 f,g,h 中的任何函数的二阶偏导数. 事实上:考察 $\{f,g\}$;由 sgard 的定义,得到

$$\begin{aligned}\{f,g\}&=\omega(\mathrm{sgrad}f,\mathrm{sgrad}g)=-(\mathrm{sgrad}g)f\\&=-L_g(f)=-(\mathrm{sgrad}g)^i\frac{\partial f}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

然而,$(\mathrm{sgrad}g)^i=\frac{-\partial g}{\partial q^i}$,$(\mathrm{sgrad}g)^j=\frac{\partial g}{\partial p^j}$,于是 $\{f,g\}$ 是由一阶偏导数的积组成的线性组合. 由此

$$\{h,\{f,g\}\}=-\{\{f,g\},h\}=-L_{\{f,g\}}(h)=-(\mathrm{sgrad}\{f,g\})^i\frac{\partial h}{\partial x^i},$$

即表示式 $\{h,\{f,g\}\}$ 是一些单项式的和,而每一个单项式都包含了或是函数 f,或是函数 g 的二阶偏导数. 于是,证明了恒等式(3)的左边部分是一些单项式的和,而每一项都含有二阶偏导数的因子. 现在,例如固定 h,把(3)式左边的项中含有函数 h 的二阶导数所有项集中在一起. 这些项是:

$$\{f,\{g,h\}\}-\{g,\{f,h\}\}=L_fL_gh-L_gL_fh=[L_f,L_g]h.$$

另一方面，已经知道两个一阶算子 L_f 和 L_g 的交换是一阶的算子（不是二阶的！），即表示式 $[L_f,L_g]h$ 仅含 h 的一阶导数. 于是，(3)的左边部分，一般不含 h 的二阶导数. 按同样的理由，(3)的左边部分也不含 f 和 g 的二阶导数，即(3)的左边部分等于0. 命题证毕.

具有满足性质(1)—(3)的双线性运算子的线性空间称为**李代数**.

推论 2　在辛流形 (M^{2n},ω) 上的所有光滑函数的线性空间 $F(M^{2n})$ 是关于Poisson括号李代数.

这一点可由上面的证明得到. 李代数 $F(M)$ 是无限维的. 考察李代数 $F(M)$ 到李代数 $V(M)$ 上的映射 α，$V(M)$ 是所有 M 上的光滑向量场构成的空间，α 由公式 $\alpha(f)=\mathrm{sgrad}f$ 所定义.

推论 3　映射 $\alpha:f\to\mathrm{sgrad}f$ 是李代数的同态，即 $\alpha\{f,g\}=[\alpha f,\alpha g]$.

证明　应该证明 $\mathrm{sgrad}\{f,g\}=[\mathrm{sgrad}f,\mathrm{sgrad}g]$. 由 Jacobi 恒等式，我们有

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{sgrad}\{f,g\})h &= \omega(\mathrm{sgrad}\{f,g\},\mathrm{sgrad}h) = -\{h,\{f,g\}\}\\
&= -\{g,\{f,h\}\}+\{f,\{g,h\}\} = -L_gL_fh+L_fL_gh\\
&= [L_f,L_g]h;
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{sgrad}\{f,g\}=[\mathrm{sgrad}f,\mathrm{sgrad}g],
$$

这就是所要求的. 推论证毕.

因为 α 是李代数的同态，所以李代数 $F(M)$ 在 M 上的所有光滑场的李代数 $V(M)$ 中的像是某个子代数，用 $H(M)$ 表示它. 由 α 的定义得到，这是 M 上的所有Hamilton 场的李代数. 因而，$\alpha:F(M)\to H(M)$ 是满同态. 但 α 不是单同态，因为存在非平凡的核：局部常数函数是 α 的核，而若假定 M 是连通的，则 α 的核是一维的且由 M 上的常数函数组成. 于是 $H(M)\cong F(M)/\mathbf{R}^1$. 子代数 $H(M)\subset V(M)$，$H(M)=H_\omega(M)$ 当然依赖于 M 上的辛结构.

Poisson 括号在研究 Hamilton 流的积分中有用.

命题 4　设 $\boldsymbol{v}=\mathrm{sgrad}H$ 是 M^{2n} 上的 Hamilton 流，并设 $f(x)$ 是光滑函数. 此函数与 Hamilton H 可交换，即 $\{f,H\}\equiv 0$. 则 f 是流 $\boldsymbol{v}$ 的积分，即函数 f 沿着场 $\boldsymbol{v}$ 的积分轨线是常数. 反之：场 $\mathrm{sgrad}H$ 的任何积分 g 与 H 可交换，$\{g,H\}\equiv 0$.

证明　求出 f 沿着场 $\boldsymbol{v}$ 的导数即可，也就是求出 $(\mathrm{sgrad}H)f$ 即可. 根据 $\mathrm{sgrad}H$ 的定义，我们有：$(\mathrm{sgrad}H)f=\{H,f\}\equiv 0$，这就是所要求的. 命题证毕.

译者后记

本书的前身为《微分几何与拓扑学教程》(курс дифференциальной геометрии и топологии,以下简称《教程》),现改为《微分几何与拓扑学简明教程》(Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии,以下简称《简明教程》).为了使其简明,作者删去了《教程》中涉及到较深的内容和概念,并删去了部分定理(引理)的证明.为使全书统一、一致,除少数节重写或增加一些内容外,其他的修改虽然不少(几乎遍及全书),但大部分是表述上的修改.

《教程》的前四章,曾由我翻译,高等教育出版社于1989年和1994年分两册出版,第一册由胡和生、姜国英校订,第二册由陈维桓校订,后三章虽有译稿,但未能出版.这次高等教育出版社委托我根据俄文《简明教程》进行修订,由于时间关系,修订稿未能请原校订人校订.为了反映历史的状况,也为了表示对校订人的敬意和感谢,在《简明教程》的署名时,仍将他们列为校订人,特此说明.

张爱和

2005年9月

俄罗斯数学教材选译

•数学天元基金资助项目•

书名	作者
数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
数学分析讲义	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
代数学引论 I: 基础代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 II: 线性代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 III: 代数结构基础	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (I) 几何曲面、变换群与场	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (II) 流形上的几何与拓扑	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (III) 同调论引论	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
常微分方程	Л. С. 庞特里亚金
奇异摄动方程解的渐近展开	А. Б. 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫
随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿尔诺德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
连续介质力学 (I)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (II)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

郑重声明